1 Virguerias integración por partes

Exercise 1 *Calcula la siguiente integral* $\int \ln x dx$

Solución:
Mediante una virguería:
Considero la función $f(x) = x \ln x$ y la derivo $f\,'(x) = \ln x + x \cdot \frac{1}{x}$
Hemos obtenido lo siguiente:

$$(x \ln x)' = \ln x + 1$$

aislando en esta relación el $\ln x$;tendremos:

$$\ln x = (x \ln x)' - 1$$

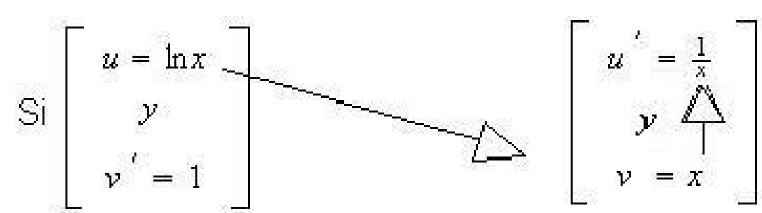
Si ahora integramos:

$$\begin{aligned} \int \ln x \; dx &= \int (x \ln x)' \; dx - \int 1 \; dx \\ \int \ln x \; dx &= x \ln x - x + C \end{aligned}$$

Integrando por partes:
Recuerda que la fórmula dice:

$$\int u \cdot v\,' dx = u \cdot v - \int u\,' \cdot v \; dx$$

Si pretendemos integrar $\int \ln x \; dx = \int \ln x \cdot 1 \; dx$ tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\,'\cdot$



con lo que:

$$\int \ln x \cdot 1 dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} dx = x \ln x - x + C$$

Exercise 2 *Calcula la siguiente integral* $\int \arctan x \; dx$

Solución:
Mediante una virguería:
Considero la función $f(x) = x \arctan x$ y la derivo $f\,'(x) = \arctan x + \dfrac{x}{1+x^2}$
Hemos obtenido lo siguiente:

$$(x \arctan x)' = \arctan x + \frac{x}{1+x^2}$$

aislando en esta relación el $\arctan x$;tendremos:

$$\arctan x = (x \arctan x)' - \frac{x}{1+x^2}$$

Si ahora integramos:

$$\begin{aligned} \int \arctan x \; dx &= \int (x \arctan x)' \; dx - \int \frac{x}{1+x^2} \; dx \\ \int \arctan x \; dx &= x \arctan x - \frac{1}{2} \ln \left|1+x^2\right| + C \end{aligned}$$

Integrando por partes:
Recuerda que la fórmula dice:

$$\int u{\cdot}v\,'dx = u{\cdot}v - \int u\,'{\cdot}v \; dx$$

Si pretendemos integrar $\int \arctan x \; dx = \int \arctan x{\cdot}1 \; dx$ tendremos que realizar la
siguiente elección para u y para $v\,'$·

con lo que:

$$\int \arctan x \; dx = x \arctan x - \int \frac{x}{1+x^2} dx = x \arctan x - \frac{1}{2} \ln \left|1+x^2\right| + C$$

Exercise 3 *Calcula la siguiente integral* $\int x \ln x \; dx$

Solución:
Mediante una virguería:
Considero la función $f(x) = \frac{x^2}{2} \ln x$ y la derivo $f\,'(x) = x \ln x + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x}$
Hemos obtenido lo siguiente:

$$\left(\frac{x^2}{2} \ln x \right)' = x \ln x + \frac{x}{2}$$

aislando en esta relación el $x \ln x$;tendremos:

$$x \ln x = \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right)' - \frac{x}{2}$$

Si ahora integramos:

$$\begin{aligned} \int x \ln x \; dx &= \int \left(\frac{x^2}{2} \ln x \right)' \; dx - \int \frac{x}{2} \; dx \\ \int x \ln x x \; dx &= \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

Integrando por partes:
Recuerda que la fórmula dice:

$$\int u \cdot v\,' dx = u \cdot v - \int u\,' \cdot v \; dx$$

Si pretendemos integrar $\int x \ln x \; dx = \int \ln x \cdot x \; dx$ tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\,'$

$$\left[\begin{array}{c} u = \ln x \\ y \\ v\,' = x \end{array} \right] \qquad \left[\begin{array}{c} u\,' = \frac{1}{x} \\ y \\ v \; = \frac{x^2}{2} \end{array} \right]$$

con lo que:

$$\int x \ln x dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x \cdot dx = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$$

Exercise 4 *Calcula la siguiente integral* $\int x \arctan x \; dx$

Solución:
Mediante una virguería:
Considero la función $f(x) = \dfrac{x^2}{2} \arctan x \rightarrow f\ '(x) = x \arctan x + \frac{1}{2} \dfrac{x^2}{1+x^2}$
Hemos obtenido lo siguiente:

$$\left(\frac{x^2}{2} \arctan x \right)' = x \arctan x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{1+x^2}$$

aislando en esta relación $x \arctan x$;tendremos:

$$x \arctan x = \left(\frac{x^2}{2} \arctan x \right)' - \frac{1}{2} \frac{x^2}{1+x^2}$$

Si ahora integramos:

$$\int x \arctan x \; dx = \int \left(\frac{x^2}{2} \arctan x \right)' \; dx - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \; dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \left[\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \; dx \right] + C$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx + C = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

Integrando por partes:
Recuerda que la fórmula dice:

$$\int u \cdot v\ ' dx = u \cdot v - \int u\ ' \cdot v \; dx$$

Si pretendemos integrar $\int x \arctan x \; dx = \int \arctan x \cdot x \; dx$ tendremos que realizar la
siguiente elección para u y para $v\ '$·

$$\begin{bmatrix} u = \arctan x \\ y \\ v\ ' = x \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u\ ' = \dfrac{1}{1+x^2} \\ y \\ v \ = \dfrac{x^2}{2} \end{bmatrix}$$

con lo que:

$$\int x \arctan x \; dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int \frac{x^2}{1+x^2} \; dx = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \left[\int \frac{1+x^2-1}{1+x^2} \; dx \right] + C$$

$$= \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{1+x^2} dx + C = \frac{x^2}{2} \arctan x - \frac{1}{2} x + \frac{1}{2} \arctan x + C$$

Exercise 5 *Calcula la siguiente integral* $\int x \cos x \; dx$

Solución:
Mediante una virguería:
Considero la función $f(x) = x \sin x$ y la derivo $f\,'(x) = \sin x + x \cos x$
Hemos obtenido lo siguiente:

$$(x \sin x)^{'} = \sin x + x \cos x$$

aislando en esta relación el $x \cos x$;tendremos:

$$x \cos x = (x \sin x)^{'} - \sin x$$

Si ahora integramos:

$$\begin{aligned} \int x \cos x \; dx &= \int (x \sin x)^{'} \; dx - \int \sin x \; dx \\ \int x \cos x \; dx &= x \sin x + \cos x + C \end{aligned}$$

Integrando por partes:
Recuerda que la fórmula dice:

$$\int u{\cdot}v\,'dx = u{\cdot}v - \int u\,'{\cdot}v \; dx$$

Si pretendemos integrar $\int x \cos x \; dx = \int x{\cdot}\cos x \; dx$ tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\,'$

$$\text{Si} \begin{bmatrix} u = x \\ y \\ v\,' = \cos x \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u = 1 \\ y \\ v = \int \cos x \, dx = \sin x \end{bmatrix}$$

con lo que:

$$\int x \cos x \; dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$$

Exercise 6 *Calcula la siguiente integral* $\int x \sin x \ dx$

Solución:

Mediante una virguería:

Considero la función $f(x) = x \cos x$ y la derivo $f\ '(x) = \cos x - x \sin x$

Hemos obtenido lo siguiente:

$$(x \cos x)^{'} = \cos x - x \sin x$$

aislando en esta relación el $x \sin x$;tendremos:

$$x \sin x = \cos x - (x \cos x)^{'}$$

Si ahora integramos:

$$\begin{aligned} \int x \sin x \ dx &= \int \cos x \ dx - \int (x \cos x)^{'} \ dx \\ \int x \sin x \ dx &= \sin x - x \cos x + C \end{aligned}$$

Integrando por partes:

Recuerda que la fórmula dice:

$$\int u{\cdot}v\ 'dx = u{\cdot}v - \int u\ '{\cdot}v \ dx$$

Si pretendemos integrar $\int x \sin x \ dx = \int x{\cdot}\sin x \ dx$ tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\ '$

$$\text{Si} \left[\begin{array}{c} u = x \\ y \\ v' = \sin x \end{array} \right] \longrightarrow \left[\begin{array}{c} u' = 1 \\ y \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array} \right]$$

con lo que:

$$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$$

Exercise 7 *Calcula la siguiente integral* $\int xe^x\ dx$

Solución:

<u>**Mediante una virguería**</u>:

<u>Considero la función $f(x) = xe^x$ y la derivo $f\ '(x) = e^x + xe^x$</u>

Hemos obtenido lo siguiente:

$$(xe^x)' = e^x + xe^x$$

aislando en esta relación el xe^x;tendremos:

$$xe^x = (xe^x)' - e^x$$

Si ahora integramos:

$$\begin{aligned}\int xe^x\ dx &= \int (xe^x)'\ dx - \int e^x\ dx \\ \int xe^x\ dx &= xe^x - e^x + C\end{aligned}$$

<u>**Integrando por partes:**</u>

<u>Recuerda que la fórmula dice:</u>

$$\int u{\cdot}v\ 'dx = u{\cdot}v - \int u\ '{\cdot}v\ dx$$

Si pretendemos integrar $\int xe^x\ dx = \int x{\cdot}e^x\ dx$ tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\ '$

$$\text{Si}\ \begin{bmatrix} u = x \\ y \\ v\ ' = e^x \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u\ ' = 1 \\ y \\ v = \int e^x dx = e^x \end{bmatrix}$$

con lo que:

$$\int xe^x\ dx = xe^x - \int e^x dx = xe^x - e^x + C$$

Exercise 8 *Calcula la siguiente integral* $\int \sin^2 x \ dx$

Solución:
Mediante una virguería:
Considero la función $f(x) = \sin x \cos x$ y la derivo$f\ '(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
Como $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; entonces la derivada queda así:

$$f\ '(x) = 1 - \sin^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$$

$$(\sin x \cos x)^{'} = 1 - 2\sin^2 x$$

aislando en esta relación el $\sin^2 x$; tendremos:

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}\left[1 - (\sin x \cos x)^{'}\right]$$

Si ahora integramos:

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \ dx &= \frac{1}{2}\int 1 \ dx - \frac{1}{2}\int (\sin x \cos x)^{'} \ dx \\ \int \sin^2 x \ dx &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C\end{aligned}$$

Integrando por partes:
Recuerda que la fórmula dice:

$$\int u{\cdot}v\ 'dx = u{\cdot}v - \int u\ '{\cdot}v \ dx$$

Si pretendemos integrar $\int \sin^2 x \ dx = \int \sin x{\cdot}\sin x \ dx$ tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\ '$

$$\text{Si} \begin{bmatrix} u = \sin x \\ y \\ v\ ' = \sin x \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u\ ' = \cos x \\ y \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{bmatrix}$$

con lo que:

$$\int \sin^2 x \ dx = -\sin x \cos x + \int \cos^2 x \ dx$$

Como $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$; entonces la integral :

$$\begin{aligned}\int \sin^2 x \ dx &= -\sin x \cos x + \int 1dx - \int \sin^2 x \ dx \\ \int \sin^2 x \ dx &= -\sin x \cos x + x - \int \sin^2 x \ dx + 2C\end{aligned}$$

Aislando $\int \sin^2 x \ dx$ nos queda:

$$2\int \sin^2 x dx = -\sin x \cos x + x + 2C \to \int \sin^2 x dx = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}\sin x \cos x + C$$

Exercise 9 *Calcula la siguiente integral* $\int \cos^2 x \ dx$

Solución:
Mediante una virguería:
Considero la función $f(x) = \sin x \cos x$ y la derivo$f\ '(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
Como $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; entonces la derivada queda así:

$$f\ '((x) = \cos^2 x - \left(1 - \cos^2 x\right) = 2\cos^2 x - 1$$
$$(\sin x \cos x)^{'} = 2\cos^2 x - 1$$

aislando en esta relación la $\cos^2 x$; tendremos:

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}\left[1 + (\sin x \cos x)^{'}\right]$$

Si ahora integramos:

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \ dx &= \frac{1}{2}\int 1 \ dx + \frac{1}{2}\int (\sin x \cos x)^{'} \ dx \\ \int \cos^2 x \ dx &= \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x + C \end{aligned}$$

Integrando por partes:
Recuerda que la fórmula dice:

$$\int u{\cdot}v\ 'dx = u{\cdot}v - \int u\ '{\cdot}v \ dx$$

Si pretendemos integrar $\int \cos^2 x \ dx = \int \cos x{\cdot}\cos x \ dx$ tendremos que realizar la
siguiente elección para u y para $v\ '$

$$\text{Si} \begin{bmatrix} u = \cos x \\ y \\ v\ ' = \cos x \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u\ ' = -\sin x \\ y \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{bmatrix}$$

con lo que:

$$\int \cos^2 x \ dx = \sin x \cos x + \int \sin^2 x \ dx$$

Como $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$; entonces la integral queda :

$$\begin{aligned} \int \cos^2 x \ dx &= \sin x \cos x + \int 1dx - \int \cos^2 x \ dx \\ \int \cos^2 x \ dx &= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \ dx + 2C \end{aligned}$$

Aislando $\int \cos^2 x \ dx$ nos queda:

$$2\int \cos^2 x dx = +\sin x \cos x + x + 2C \rightarrow \int \cos^2 x dx = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\sin x \cos x + C$$

Exercise 10 *Calcula la siguiente integral* $\int \sec^3 x \; dx = \int \sec x{\cdot}\sec^2 x \; dx$

Solución:

<u>Mediante una virguería</u>:

Sea la función $f(x) = \sec x \tan x \to f\,'(x) = \sec x \tan^2 x + \sec^3 x$

Como $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ entonces la derivada queda así:

$$f\,'(x) = \sec x \tan^2 x + \sec^3 x = \sec x\left(\sec^2 x - 1\right) + \sec^3 x$$

$$(\sec x \tan x)' = 2\sec^3 x - \sec x$$

aislando en esta relación la $\sec^3 x$; tendremos:

$$\sec^3 x = \frac{1}{2}\left[\sec x + (\sec x \tan x)'\right]$$

Si ahora integramos:

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \; dx &= \frac{1}{2}\int \sec x \; dx + \frac{1}{2}\int (\sec x \tan x)' \; dx \\ \int \sec^3 x \; dx &= \frac{1}{2}\int \sec x \; dx + \frac{1}{2}\sec x \tan x + C \end{aligned}$$

como $\int \sec x \; dx = \ln|\sec x + \tan x| + K$ entonces:

$$\int \sec^3 x \; dx = \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + \frac{1}{2}\sec x \tan x + C\,'$$

<u>Integrando por partes:</u>

Recuerda que la fórmula dice $\int u{\cdot}v\,'dx = u{\cdot}v - \int u\,'{\cdot}v \; dx$

Si pretendemos integrar $\int \sec^3 x \; dx = \int \sec x{\cdot}\sec^2 x \; dx$ tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\,'$

Si $\begin{bmatrix} u = \sec x \\ v\,' = \sec^2 x \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} u\,' = \sec x \tan x \\ v = \int \sec^2 x dx = \tan x \end{bmatrix}$

con lo que:

$$\int \sec^3 x \; dx = \sec x \tan x - \int \sec x \tan^2 x \; dx$$

$\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ entonces la integral :

$$\begin{aligned} \int \sec^3 x \; dx &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x \; dx \\ \int \sec^3 x \; dx &= \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \ln|\sec x + \tan x| + 2C \end{aligned}$$

Aislando $\int \sec^3 x \; dx$ nos queda:

$$2\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x + \ln|\sec x + \tan x| + 2C \to \int \sec^3 x dx = \frac{\sec x \tan x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\sec x + \tan x| + C$$

Exercise 11 *Calcula la siguiente integral* $\int \csc^3 x \; dx = \int \csc x{\cdot}\cot^2 x \; dx$

Solución:

<u>**Mediante una virguería**</u>:

Sea la función $f(x) = \csc x \cot x \to f\,'(x) = -\csc x \cot^2 x - \csc^3 x$

Como $\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ entonces la derivada queda así:

$$f\,'(x) = -\csc x \cot^2 x - \csc^3 x = -\csc x \left(\csc^2 x - 1\right) - \csc^3 x$$

$$(\csc x \cot x)^{'} = -2\sec^3 x + \csc x$$

aislando en esta relación $\csc^3 x$; tendremos:

$$\csc^3 x = \frac{1}{2}\left[\csc x - (\csc x \cot x)^{'}\right]$$

Si ahora integramos:

$$\begin{aligned}
\int \csc^3 x \; dx &= \frac{1}{2}\int \csc x \; dx - \frac{1}{2}\int (\csc x \cot x)^{'} \; dx \\
\int \csc^3 x \; dx &= \frac{1}{2}\int \csc x \; dx - \frac{1}{2}\csc x \cot x + C
\end{aligned}$$

como $\int \csc x \; dx = \ln|\csc x - \cot x| + K$ entonces:

$$\int \csc^3 x \; dx = \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| - \frac{1}{2}\csc x \cot x + C\,'$$

<u>**Integrando por partes:**</u>

Recuerda que la fórmula dice: $\int u{\cdot}v\,'dx = u{\cdot}v - \int u\,'{\cdot}v \; dx$

Si pretendemos integrar $\int \csc^3 x \; dx = \int \csc x{\cdot}\csc^2 x \; dx$ tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\,'$

Si $\left[\begin{array}{c} u = \csc x \\ v\,' = \csc^2 x \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c} u\,' = -\csc x \cot x \\ v = \int \csc^2 x dx = -\cot x \end{array}\right]$

con lo que:

$$\int \csc^3 x \; dx = -\csc x \cot x - \int \csc x \cot^2 x \; dx$$

$\cot^2 x = \csc^2 x - 1$ entonces la integral :

$$\begin{aligned}
\int \csc^3 x \; dx &= -\csc x \cot x - \int \csc^3 x dx + \int \csc x \; dx \\
\int \csc^3 x \; dx &= -\csc x \cot x - \int \csc^3 x dx + \ln|\csc x - \cot x| + 2C
\end{aligned}$$

Aislando $\int \csc^3 x \; dx$ nos queda:

$$\begin{aligned}
2\int \csc^3 x dx &= -\csc x \cot x + \ln|\csc x - \cot x| + 2C \\
\int \csc^3 x dx &= -\frac{\csc x \cot x}{2} + \frac{1}{2}\ln|\csc x - \cot x| + C
\end{aligned}$$

Exercise 12 *Calcula la siguiente integral* $\int e^x \cos x \; dx$

Solución:

Mediante una virguería:

Sea la función $f(x) = e^x (\cos x + \sin x)$

$f\,'(x) = e^x (\cos x + \sin x) + e^x(-\sin x + \cos x) = 2e^x \cos x$

$$\left(e^x (\cos x + \sin x)\right)' = 2e^x \cos x$$

Integrando tendremos

$$\begin{aligned} \int \left(e^x (\cos x + \sin x)\right)' \; dx &= 2\int e^x \cos x \; dx \\ e^x (\cos x + \sin x) &= 2\int e^x \cos x \; dx \\ \int e^x \cos x \; dx &= \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C \end{aligned}$$

Integrando por partes:

Recuerda que la fórmula dice: $\int u{\cdot}v\,'dx = u{\cdot}v - \int u\,'{\cdot}v \; dx$

Si pretendemos integrar $\int e^x \cos x \; dx$ tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\,'$

Si $\left[\begin{array}{c} u = e^x \\ v\,' = \cos x \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c} u\,' = e^x \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{array}\right]$

con lo que:

$$\int e^x \cos x dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x \; dx \tag{1}$$

Volvemos a integrar por partes para calcular $\int e^x \sin x \; dx$

Para ello; tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\,'$:

Si $\left[\begin{array}{c} u = e^x \\ v\,' = \sin x \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c} u\,' = e^x \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{array}\right]$

con lo que:

$$\int e^x \sin x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx$$

sustituyendo esta última expresión en (1); entonces:

$$\begin{aligned} \int e^x \cos x dx &= e^x \sin x - \int e^x \sin x \; dx = e^x \sin x - \left[-e^x \cos x + \int e^x \cos x dx\right] + 2C \\ \int e^x \cos x dx &= e^x \sin x + e^x \cos x - \int e^x \cos x dx + 2C \end{aligned}$$

Aislando $\int e^x \cos x dx$ la integral nos quedará:

$$\int e^x \cos x dx = \frac{1}{2} e^x (\cos x + \sin x) + C$$

Exercise 13 *Calcula la siguiente integral* $\int e^x \sin x \ dx$

Solución:

<u>**Mediante una virguería**</u>:

Sea la función $f(x) = e^x (\sin x - \cos x)$

$f\ '(x) = e^x (\sin x - \cos x) + e^x(\cos x + \sin x) = 2e^x \sin x$

$$(e^x (\sin x - \cos x))' = 2e^x \sin x$$

Integrando tendremos

$$\begin{aligned}
\int (e^x (\sin x - \cos x))' \ dx &= 2\int e^x \sin x \ dx \\
e^x (\sin x - \cos x) + 2C &= 2\int e^x \sin x \ dx \\
\int e^x \sin x \ dx &= \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C
\end{aligned}$$

<u>**Integrando por partes:**</u>

Recuerda que la fórmula dice: $\int u \cdot v\ ' dx = u \cdot v - \int u\ ' \cdot v \ dx$

Si pretendemos integrar $\int e^x \sin x \ dx$ tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\ '$

Si $\begin{bmatrix} u = e^x \\ v\ ' = \sin x \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} u\ ' = e^x \\ v = \int \sin x dx = -\cos x \end{bmatrix}$

con lo que:

$$\int e^x \sin x = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx \tag{2}$$

Volvemos a integrar por partes para calcular $\int e^x \cos x \ dx$

Para ello; tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\ '$:

Si $\begin{bmatrix} u = e^x \\ v\ ' = \cos x \end{bmatrix}$ $\begin{bmatrix} u\ ' = e^x \\ v = \int \cos x dx = \sin x \end{bmatrix}$

con lo que:

$$\int e^x \cos x = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx$$

sustituyendo esta última expresión en (2); entonces:

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x dx &= -e^x \cos x + \int e^x \cos x \ dx = -e^x \cos x + \left[e^x \sin x - \int e^x \sin x dx \right] + 2C \\
\int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - e^x \cos x - \int e^x \sin x dx + 2C
\end{aligned}$$

Aislando $\int e^x \sin x dx$ la integral nos quedará:

$$\int e^x \sin x dx = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

Exercise 14 *Calcula la siguiente integral* $\int \arcsin x \ dx$

Solución:

Mediante una virgueria

Derivo la función $y = x\arcsin x \to y\ ' = \arcsin x + x\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

Hemos obtenido:

$$(x\arcsin x)' = \arcsin x + \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Despejando $\arcsin x$

$$\arcsin x = (x\arcsin x)' - \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

Si ahora integramos:

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x dx &= (x\arcsin x)' - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
\int \arcsin x dx &= x\arcsin x - \frac{1}{\boxed{\text{-2}}}\int \boxed{\text{-2}}\, x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\
\int \arcsin x dx &= x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
\int \arcsin x dx &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

Integrando por partes

Recuerda que :

$$\int u{\cdot}v\ ' dx = u{\cdot}v - \int u\ '{\cdot}v\ dx$$

Si pretendemos integrar $\int \arcsin x dx = \int \arcsin x{\cdot}1\ dx$ tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\ '$

$$\text{Si } \begin{bmatrix} u = \arcsin x \\ v\ ' = 1 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} u\ ' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} \\ v = x \end{bmatrix}$$

Con lo que:

$$\begin{aligned}
\int \arcsin x dx &= x\arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \\
\int \arcsin x dx &= x\arcsin x - \frac{1}{\boxed{\text{-2}}}\int \boxed{\text{-2}}\, x(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} dx \\
\int \arcsin x dx &= x\arcsin x + \frac{1}{2}\frac{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C \\
\int \arcsin x dx &= x\arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

Exercise 15 *Calcula la siguiente integral* $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$

Solución:

Mediante una virgueria

Derivo la función $y = x\sqrt{1-x^2} \rightarrow y\ ' = \left[\sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\right]$

Hemos obtenido:

$$\left(x\sqrt{1-x^2}\right)' = \sqrt{1-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Nota a) $\sqrt{1-x^2} = \dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$

Por la nota a) ,y despejando $\dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}$ tendremos

$$\frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} - \left(x\sqrt{1-x^2}\right)'\right]$$

Si ahora integramos:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx &= \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ dx - \int \left(x\sqrt{1-x^2}\right)'\ dx\right] \\
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\ dx &= \frac{1}{2}\left[\arcsin x - x\sqrt{1-x^2}\right] + C
\end{aligned}$$

Integrando por partes

Recuerda que :

$$\int u{\cdot}v\ 'dx = u{\cdot}v - \int u\ '{\cdot}v\ dx$$

Si pretendemos integrar $\int \dfrac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx = \int x\dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx$ tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\ '$

Si $\left[\begin{array}{c} u = x \\ v\ ' = \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c} u\ ' = 1 \\ v = \int \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}}dx = -\sqrt{1-x^2} \end{array}\right]$

Con lo que:

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -x\sqrt{1-x^2} + \int \sqrt{1-x^2}dx \\
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx &= -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
I &= -x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}dx - \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx \\
I &= -x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x - I + 2C \\
I &= \frac{1}{2}\left[-x\sqrt{1-x^2} + \arcsin x\right] + C
\end{aligned}$$

Exercise 16 *Calcula la siguiente integral* $\int \dfrac{x^2}{\left(1+x^2\right)^2}\ dx$

Solución:

Mediante una virgueria

Derivo la función $y = \frac{x}{1+x^2} \to y\ ' = \frac{d}{dx}\left[\frac{x}{1+x^2}\right] = \left[\frac{1}{x^2+1} - 2\frac{x^2}{(x^2+1)^2}\right]$

Hemos obtenido:

$$\left(\frac{x}{1+x^2}\right)' = \frac{1}{x^2+1} - 2\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

Despejando $\frac{x^2}{(x^2+1)^2}$ tendremos

$$\frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{x^2+1} - \left(\frac{x}{1+x^2}\right)'\right]$$

Si ahora integramos:

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\ dx = \frac{1}{2}\left[\int \frac{1}{x^2+1}\ dx - \int \left(\frac{x}{1+x^2}\right)'\ dx\right]$$

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}\ dx = \frac{1}{2}\left[\arctan x - \frac{x}{1+x^2}\right] + C$$

Integrando por partes

Recuerda que :

$$\int u{\cdot}v\ 'dx = u{\cdot}v - \int u\ '{\cdot}v\ dx$$

Si pretendemos integrar $\int \frac{x^2}{(x^2+1)^2}dx = \int x\dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}\ dx$ tendremos que realizar la siguiente elección para u y para $v\ '$

Nota: $\int \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = \dfrac{1}{\boxed{2}}\int \boxed{2}x\left(x^2+1\right)^{-2}dx = \dfrac{1}{2}\dfrac{\left(x^2+1\right)^{-1}}{-1} = -\frac{1}{2(x^2+1)}$

Si $\left[\begin{array}{c} u = x \\ v\ ' = \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2} \end{array}\right]$ $\left[\begin{array}{c} u\ ' = 1 \\ v = \int \dfrac{x}{\left(x^2+1\right)^2}dx = -\frac{1}{2(x^2+1)} \end{array}\right]$

Con lo que:

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx = -\frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x^2+1\right)}dx$$

$$\int \frac{x^2}{\left(x^2+1\right)^2}dx = -\frac{x}{2\left(x^2+1\right)} + \frac{1}{2}\arctan x + C$$