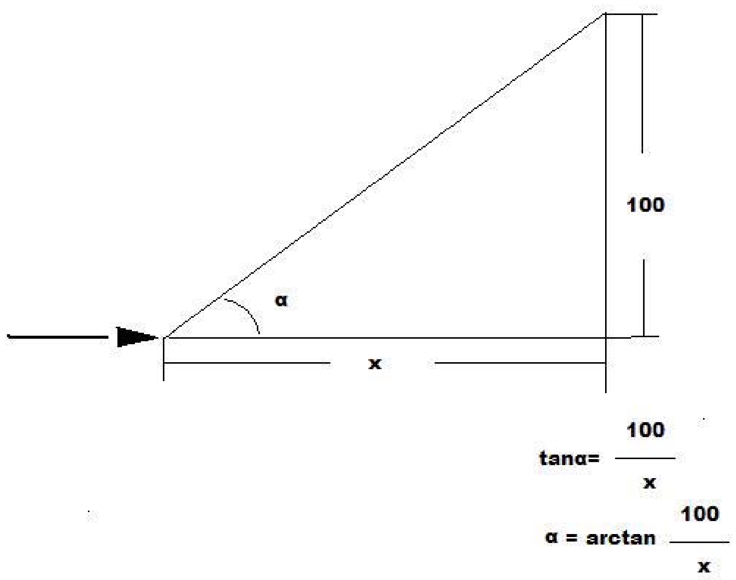
1 Ejercicios selectivo

Exercise 1 *Un vehículo se acerca a una torre de* 100 *m de altura.con una velocidad de* 25 *m/seg ¿Cuál es la velocidad de variación del ángulo con que el vehículo observa el edificio , en el instante en que éste se encuentra a 300 m de su base ?*



Datos: Nos indican que $\dfrac{dx}{dt} = 25\ m/seg$ y nos piden que calculemos $\dfrac{d\alpha}{dt}$ cuando $x = 300$ m

Nosotros sabemos que:

$$\begin{aligned} \alpha &= \arctan\frac{100}{x} \\ \frac{d\alpha}{dx} &= \frac{d\left(\arctan\frac{100}{x}\right)}{dx} = -\frac{100}{x^2+10\,000} \end{aligned}$$

Por la regla de la cadena:

$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\alpha}{dx}\cdot\frac{dx}{dt} = -\frac{100}{x^2+10\,000}\cdot 25$$

Ahora bien; cuando $x = 300\ m$

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{x=300} = -\frac{100}{300^2+10\,000}\cdot 25 = -\frac{1}{40}\ rad/seg$$

Exercise 2 *Una persona de 1.80 m de altura se aleja de un poste de alumbrado de 6 m de altura con una velocidad de* 1 m/s *. ¿Con qué rapidez crece la sombra de la persona?*

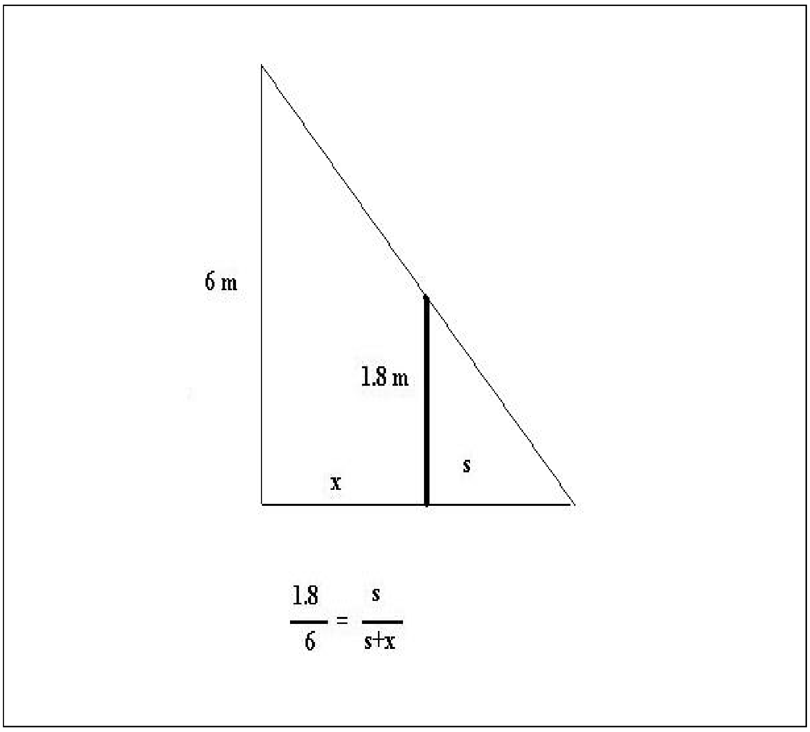


Figure 1:

Por el dibujo, observamos que $\dfrac{1.8}{6} = \dfrac{s}{s+x} \rightarrow 1.8(s+x) = 6s$

Despejando la variable s (s sombra en función de la distancia al poste de alumbrado x) tendremos

$$s = \frac{1.8x}{4.2} = \frac{3x}{7}$$

x es una función que depende del tiempo

Nosotros sabemos que $\dfrac{ds}{dx} = \dfrac{3}{7}$ y que por hipótesis $\dfrac{dx}{dt} = 1\ m/s$

Utilizando la regal de la cadena; tendremos

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$$

Por lo que; la rapidez con la que crece la sombra de la persona es

$$\frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{3}{7} m/s$$

Exercise 3 *Determina el punto de la recta $3x + y - 4 = 0$ cuya distancia al punto $Q(2, -1)$ sea mínima. Calcula la distancia del punto Q a la recta dada*

Como la recta viene dada por la ecuación $3x + y - 4 = 0 \rightarrow y = -3x + 4$
Se trata de determinar el punto de la recta $P(x, -3x + 4)$ tal que:

$$dist(P, Q) = \left\| \overrightarrow{QP} \right\| \text{ sea mínima}$$

$$\left[\begin{array}{c} P(x, -3x + 4) \\ Q(2, -1) \end{array} \right] \rightarrow \overrightarrow{QP} = (x - 2, -3x + 4 + 1) \rightarrow \overrightarrow{QP}(x - 2, -3x + 5)$$

La función a minimizar es:

$$H(x) = dist(P, Q) = \sqrt{(x - 2)^2 + (-3x + 5)^2}$$

Minimizar una función que siempre es positiva para cualquier valor de su dominio es equivalente a minimizar el cuadrado de ésta

El problema queda reducido a determinar el mínimo de la función

$$J(x) = H^2(x) = (x - 2)^2 + (-3x + 5)^2$$

Para ello, calculamos su primera y su segunda derivada derivada

$$\begin{aligned} J\,'(x) &= 2\,(x - 2) + 2\,(-3x + 5)\,(-3) = 20x - 34 \\ J\,''(x) &= 20 \end{aligned}$$

El único valor que anula su primera derivada es $x = \frac{17}{10}$ y además para él se verifica que $J\,''(\frac{17}{10}) > 0$. Entonces; por el criterio de la segunda derivada para mínimos locales (es también mínimo absoluto); podemos afirmar que para el punto de la recta $P(\frac{17}{10}, -3\frac{17}{10} + 4) = P\left(\frac{17}{10}, -\frac{11}{10}\right)$ se verifica que J es mínima

Calculemos ahora J y H

$$J(\frac{17}{10}) = \left(\frac{17}{10} - 2\right)^2 + \left(-\frac{51}{10} + 5\right)^2 = \frac{1}{10} \rightarrow H = dist(P, Q) = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Nota: Recuerda que para calcular la distancia de un punto $Q(a, b)$ a una recta r de ecuación $Ax + By + C = 0$ se utiliza la fórmula:

$$dist(Q, r) = \frac{|Aa + Bb + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Segun lo anterior, la distancia que nos han pedido la podíamos haber calculado así:

$$dist(Q(2, -1), r \equiv 3x + y - 4) = \frac{|3{\cdot}2 + 1(-1) - 4|}{\sqrt{3^2 + 1^2}} = \frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10}$$

Exercise 4 *Se quiere construir un recipiente cónico de generatriz $g = 10$ cm y de capacidad máxima.¿Cuál debe ser el radio ,r, de la base y la altura h? Ayuda: El volumen de un cono es*

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ g^2 &= h^2 + r^2 \end{aligned}$$

Como la generatriz es de 10 cm$\rightarrow 100 = h^2 + r^2 \rightarrow r^2 = 100 - h^2$
La funcióna maximizar es :

$$V = \frac{1}{3}\pi \left(100 - h^2\right) h = \frac{1}{3}\pi \left(100h - h^3\right) \text{ con } h \in [0, 10]$$

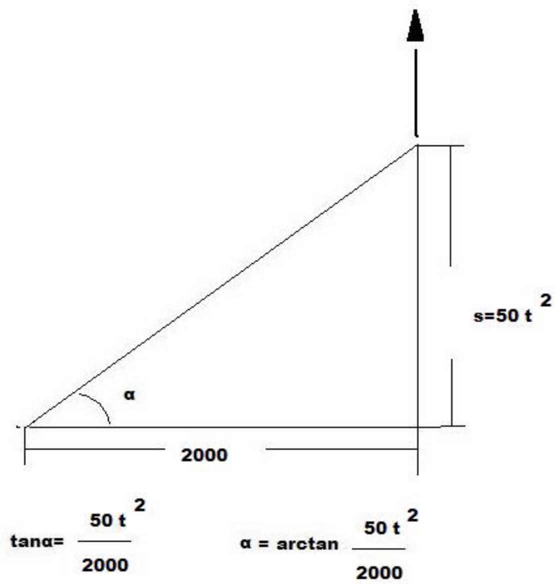
Nota:Si $\left[\begin{array}{c} h = 0 \rightarrow V = 0 \\ h = 10 \rightarrow V = 0 \end{array} \right]$
Calculamos la primera y segunda derivada de la función volumen

$$\begin{aligned} V\ '(h) &= \frac{1}{3}\pi(100 - 3h^2) \\ V\ ''(h) &= \frac{1}{3}\pi(-6h) \end{aligned}$$

El único valor que anulan la primera derivada es $h = \frac{10}{3}\sqrt{3}$ y como para él se verificda además que $V\ ''(\frac{10}{3}\sqrt{3}) = \dfrac{1}{3}\pi(-20\sqrt{3})$ <0. Entonces, por la criterio de la segunda derivada de máximo local (en este caso es absoluto también); podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} \text{Para } h &= \frac{10}{3}\sqrt{3} \text{ cm y } r = \sqrt{100 - \left(\frac{10}{3}\sqrt{3}\right)^2} = \frac{10}{3}\sqrt{6} \text{ cm} \\ \text{El volumen V} &= \frac{1}{3}\pi \left(\frac{10}{3}\sqrt{6}\right)^2 \frac{10}{3}\sqrt{3} = \frac{2000}{27}\sqrt{3}\pi \text{ cm}^3 \end{aligned}$$

Exercise 5 *Una camara de televisión, situada a ras de suelo, está filmando el despegue de un cohete espacial, que se mueve verticalmente de acuerdo con la ecuación $s = 50t^2$, donde s se mide en metros y t en seg. La cámara dista 2000 metros del punto de lanzamiento.*
¿Cuál es la velocidad de cambio del ángulo α de elevación de la cámara diez segundos después del despegue?



Nos piden que calculemos $\frac{d\alpha}{dt}$ cuando $t = 10seg$
Por el dibujo, tenemos

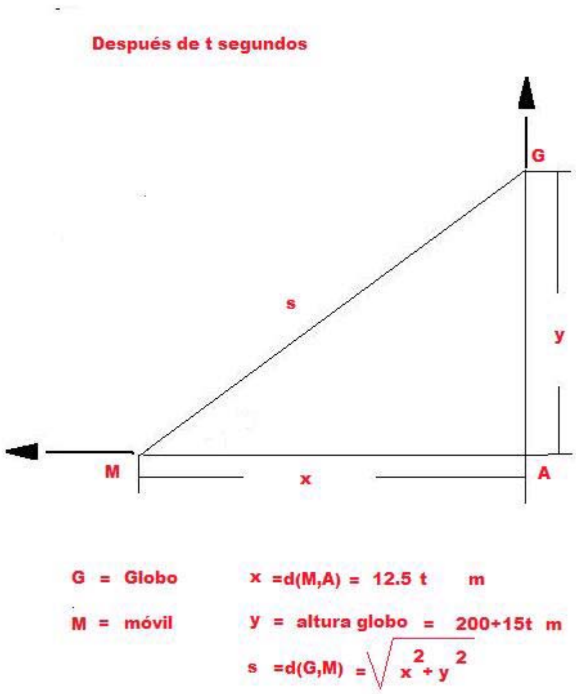
$$\frac{d\alpha}{dt} = \frac{d\left(\arctan\frac{50t^2}{2000}\right)}{dt} = \frac{80t}{t^4 + 1600}$$

Por lo tanto; cuando $t = 10$; tendremos:

$$\left(\frac{d\alpha}{dt}\right)_{t=10} = \frac{80\,(10)}{10^4 + 1600} = \frac{2}{29} rad/seg$$

Exercise 6 *Un globo sabemos que asciende desde un punto A ,situado en el suelo, con una velocidad de 15 m/s.Cuando éste se encuentra a una altura de 200 metros un vehículo pasa por el punto A con una velocidad de 12.5 m/seg. Cuál es la velocidad de variación de la distancia que los separa un segundo después de pasar el vehículo por el punto A?*

Si consideramos que han transcurrido t seg desde que el vehículo pasa por A; la posición de ambos objets viene determinada en el siguiente gráfico:



Si te fijas en el dibujo, observarás que la distancia que los separa es

$$\begin{aligned} s &= \sqrt{(12.5t)^2 + (200+15t)^2} \\ \text{Su derivada es } \frac{ds}{dt} &= = \frac{(381.25t+3000)}{\sqrt{381.25t^2+6000t+40000}} \\ \text{Nos están pidiendo } \left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=1\ seg} &= \frac{(381.25+3000)}{\sqrt{381.25+6000+40000}} = 15.7\ m/seg \end{aligned}$$

Exercise 7 *Calcula los siguientes límites*

a) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x\right)$ *b)* $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ *c)* $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{a^x-b^x}{\sin x}$

c) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln x}\right)$

Solución a: $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x\right)=\text{"}\infty-\infty\text{"}$

Vamos a realizar el siguiente cambio de variable $z=\frac{1}{x}$. Si $x\to+\infty\Leftrightarrow z\to 0$.

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x\right)=\lim_{z\to 0}\left(\sqrt[3]{\left(\frac{1}{z}\right)^3+6\left(\frac{1}{z}\right)^2}-\frac{1}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+6z}-1}{z}\right)$$

Este nuevo límite $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{1+6z}-1}{z}\right)$ presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando L'hôpital

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\frac{6}{3\sqrt[3]{(1+6z)^2}}}{1}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{6}{3\sqrt[3]{(1+6z)^2}}=2$$

Nota 1: El límite siguiente $\lim\limits_{z\to 0}\left(\dfrac{\sqrt[3]{1+6z}-1}{z}\right)$ también es posible resolverlo utilizando infintésimos

Como $z\to 0$; $\sqrt[3]{1+6z}-1$ es un infinitésimo equivalente a $\frac{1}{3}6z=2z$. Con lo que:

$$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\sqrt[3]{1+6z}-1}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{2z}{z}=2$$

Nota2: El límite inicial también se puede resolver teniendo presente :

$$A^3-B^3=(A-B)(A^2+AB+B^2)\to(A-B)=\frac{A^3-B^3}{(A^2+AB+B^2)}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2}-x\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x^3+6x^2-x^3}{\left(\sqrt[3]{x^3+6x^2}\right)^2+x\sqrt[3]{x^3+6x^2}+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{\sqrt[3]{x^6+12x^5+36x^4}+\sqrt[3]{x^6+6x^5}+x^2}$$

Como este límite presenta la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, dividiremos numerador y denominador por x^2 (dentro de la raíz cúbica por x^6)

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{6x^2}{\sqrt[3]{x^6+12x^5+36x^4}+\sqrt[3]{x^6+6x^5}+x^2}=\lim_{x\to+\infty}\frac{6}{\sqrt[3]{1+\frac{12}{x}+\frac{36}{x^2}}+\sqrt[3]{1+\frac{6}{x}}+1}=$$
$$\frac{6}{3}=2$$

Solución b: Este límite $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{x+2}-2}{x-2}$ presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando L'hôpital

$$\lim_{x\to 2}\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}}{1}=\lim_{x\to 2}\frac{1}{2\sqrt{x+2}}=\frac{1}{4}$$

Nota 1: Vamos a resolverlo utilizando el cambio de variable $z = x - 2$ y después infinitésimos. Es evidente que si $x \to 2 \Longleftrightarrow z \to 0$

Con lo que.

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{z\to 0} \frac{\sqrt{4+z}-2}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{2\left(\sqrt{\frac{4+z}{4}}-1\right)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{2\left(\sqrt{1+\frac{z}{4}}-1\right)}{z}$$

Como $z \to 0$ entonces $\sqrt{1+\frac{z}{4}}-1$ es un infinitésimo equivalente a $\frac{1}{2}\frac{z}{4} = \frac{z}{8}$

Por lo tanto:

$$\lim_{z\to 0} \frac{2\left(\sqrt{1+\frac{z}{4}}-1\right)}{z} = \lim_{z\to 0} \frac{2\left(\frac{z}{8}\right)}{z} = \frac{1}{4}$$

Nota 2: Otra manera de resolverlo

$$\lim_{x\to 2} \frac{\sqrt{x+2}-2}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{\left(\sqrt{x+2}-2\right)\left(\sqrt{x+2}+2\right)}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \lim_{x\to 2} \frac{x-2}{(x-2)\left(\sqrt{x+2}+2\right)} \lim_{x\to 2} \frac{1}{\left(\sqrt{x+2}+2\right)} = \frac{1}{4}$$

Solución c. Este límite $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{\sin x}$ presenta la indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando L'hòpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x \ln a - b^x \ln b}{\cos x} = \ln a - \ln b = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Nota 1: Como $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{b^x\left(\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1\right)}{\sin x}$, vamos a resolverlo utilizando infinitésimos

Como $\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1$ es un infinitésimo equivalente a $x \ln\left(\frac{a}{b}\right)$ y además $\sin x$ es equivalente a x cuando $x \to 0$;entonces:

$$\lim_{x\to 0} \frac{b^x\left(\left(\frac{a}{b}\right)^x - 1\right)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{b^x\left(x\ln\left(\frac{a}{b}\right)\right)}{x} = b^0 \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right)$$

Solución d. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \infty - \infty$. Operando

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln x}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{\ln x - x + 1}{(\ln x)(x-1)}$$

Este límite presenta ahora la indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando L'hòpital y operando después

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{1}{x}-1}{\frac{x-1}{x}+\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x-1+x\ln x}$$

Vuelve a aparecer la indeterminación $\frac{0}{0}$. Aplicando L'hòpital

$$\lim_{x\to 1} \frac{1-x}{x-1+x\ln x} = \lim_{x\to 1} \frac{-1}{2+\ln x} = -\frac{1}{2}$$

Exercise 8 *Unos altos hornos producen al día x toneladas de acero de baja calidad y $\frac{40-5x}{10-x}$ toneladas de acero de alta calidad, siendo 8 toneladas la producción máxima diaria de acero de baja calidad. Si el precio de una tonelada de acero de baja calidad es de 100 euros y el precio de una tonelada de acero de alta calidad es 250 euros, demostrar que se deben producir 5 toneladas por día de acero de baja calidad para que el valor de venta de la producción diaria sea máximo*

Solución:

El coste de producción diaria viene dado por la función

$$\begin{aligned} C &= 100x + 250\frac{40-5x}{10-x} = 100x + 250\frac{5x-40}{x-10} \\ C &= \frac{\left(100x^2+250x-10000\right)}{x-10} \text{ con } 0 \leq x \leq 8 \end{aligned}$$

Nota: Si el valor de venta de la producción diaria es máximo $\rightarrow$ el coste ha de ser máxímo

Fíjate que si $\left[\begin{array}{c} x=0 \rightarrow C=1000 \textit{ euros} \\ x=8 \rightarrow C=800 \text{ euros} \end{array}\right]$

Calculemos pues el valor de $x \in [0,8]$ para que el coste sea máximo.

$C(x) = \frac{\left(100x^2+250x-10000\right)}{x-10} \rightarrow C\ ' = \frac{100}{(x-10)^2}\left(x^2-20x+75\right)$

Valores que anulan $C\ '$ son:

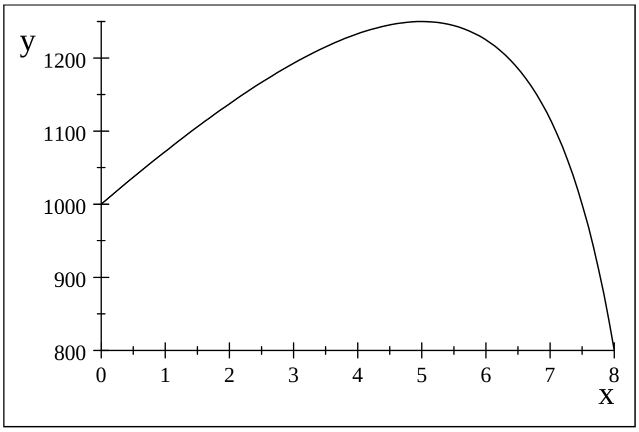
$$x^2-20x+75=0 \rightarrow x = \left\{\begin{array}{c} 15 \text{ no interesa} \\ 5 \end{array}\right.$$

Calculemos el coste para $x=5$

$$C(5) = \frac{\left(100\left(5^2\right)+250\,(5)-10000\right)}{5-10} = 1250$$

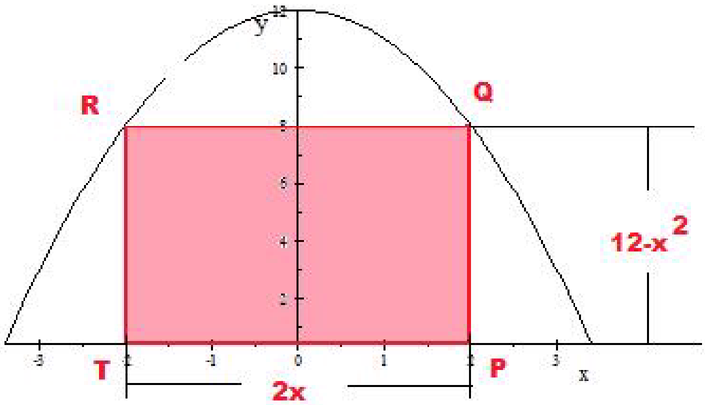
Como $C(5) > C(0)$ y $C(5) > C(8)$ $\rightarrow$El máximo absoluto para la función coste en $[0,8]$ es $x=5$ y $C(5)=1250$ euros

La gráfica de la función coste $C = \frac{\left(100x^2+250x-10000\right)}{x-10}$ en $[0,8]$ es



Exercise 9 *Una ventana rectangular tiene dos de sus vértices sobre la parábola $y = 12 - x^2$ y los otros dos sobre el eje de las X. Determina las dimensiones del rectángulo para que su superficie sea máxima*

Dibujamos la parábola $y = 12 - x^2$



El área del rectángulo $PQRT$ es$\rightarrow$ $S = 2x\left(12 - x^2\right)$ con $x \in [0, 2\sqrt{3}]$

Como $S = 24x - 2x^3 \rightarrow S\,' = 24 - 6x^2 \rightarrow S\,'' = -12x$

Para $\left[\begin{array}{c} x = 0 \rightarrow S(0) = 0 \\ x = 2\sqrt{3} \rightarrow S = 0 \end{array}\right]$

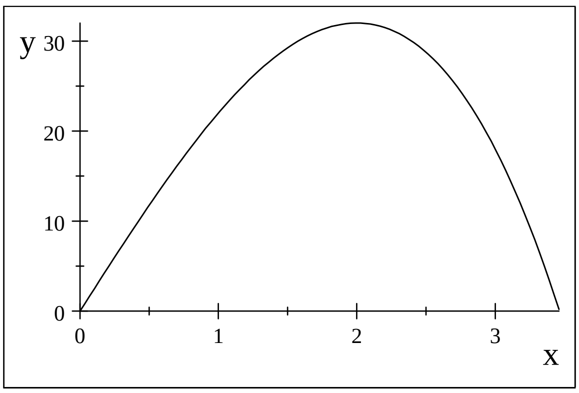
Valores que anulan su derivada:

$$24 - 6x^2 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} -2 \text{ no me interesa} \\ 2 \end{cases}$$

como para $x = 2$ se verifica que:

$S\,'(2) = 0$ y $S''(2) = -24 < 0 \rightarrow$ Si $x = 2$ la superficie $S(2) = 32\ u^2$ es máxima

Aquí está la gráfica de la superficie $S = 2x\left(12 - x^2\right)$



Exercise 10 *Dada la función* $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ *determina los coeficientes* a, b *y* c *si sabemos que:*
a) En los puntos de su gráfica de abcisas $x = 2$ *y* $x = 4$ *su recta tangente es paralela al eje* OX
b) Tiene un punto de inflexión situado en eje de las abcisas

Solución:
$f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c \rightarrow f\,'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow f\,''(x) = 6x + 2a$
Como en los puntos de abcisa $x = 2$ y $x = 4$ nos indican que su recta tangente es horizontal; entonces

$$\begin{aligned} f\,'(2) &= 0 \rightarrow 0 = 12 + 4a + b \\ f\,'(4) &= 0 \rightarrow 0 = 48 + 8a + b \end{aligned}$$

resolviendo el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 4a + b = -12 \\ 8a + b = -48 \end{array}\right\} \rightarrow a = -9, b = 24$$

La función f es :

$$f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + c \rightarrow\rightarrow f'(x) = 3x^2 - 18x + 24 \rightarrow f''(x) = 6x - 18$$

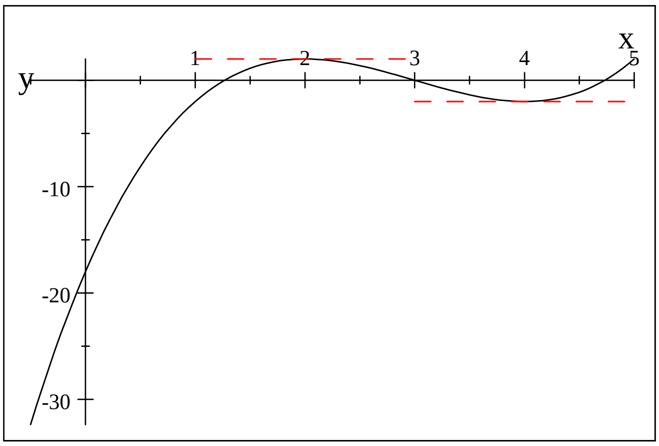
Como nos indican que en un punto de la forma P$(x_0, 0)$ tenemos un punto de inflexión y al ser f una función derivable hasta el orden 2; por la condición necesaria de punto de inflexión podemos afirmar que:

$$f\,''(x_0) = 0 \rightarrow 0 = 6x_0 - 18 \rightarrow x_0 = 3$$

Sabemos pues; que el punto de inflexión es $P(3, 0)$
Al ser P un punto de la gráfica de $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x + c$; entonces ha de verificar su ecuación

$$0 = 3^3 - 9\left(3^2\right) + 24\,(3) + c \rightarrow c = -18$$

La función pedida es $f(x) = x^3 - 9x^2 + 24x - 18$ y su gráfica es:



Exercise 11 *Dadas las fuciones reales* $f(x) = 4x^2 + 2x + 10$ *y* $g(x) = x^3 + x^2 + 5x + 5$ *se pide lo siguiente:*

a) Determina las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

b)Calcula la función $H(x) = \int \dfrac{f(x)}{g(x)} dx$ *que cumpla* $H(0) = 0$

Solución a)

La función $t(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5}$ es tal que su dominio de definición y de continuidad es:

$D(f) = \mathbb{R} \sim \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ x^3 + x^2 + 5x + 5 = 0\right\}$

Resolviendo la ecuación por factorización

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 + 5x + 5 &= 0 \\ x^2(x+1) + 5(x+1) &= 0 \\ (x^2+5)(x+1) &= 0 \to \begin{cases} x + 1 = 0 \to x = -1 \\ x^2 + 5 = 0 \text{ No tiene solución real} \end{cases} \end{aligned}$$

Podemos concluir que

$$D(f) = \mathbb{R} \sim \{-1\}$$

La función no es continua para $x = -1$; ya que para dicho valor no existe imagen

Calculemos pues sus límites laterales

$$\begin{aligned} \lim_{x \to -1^+} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} &= \lim_{x \to -1^+} \frac{4x^2 + 2x + 10}{(x^2+5)(x+1)} = \frac{12}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \to -1^-} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} &= \lim_{x \to -1^-} \frac{4x^2 + 2x + 10}{(x^2+5)(x+1)} = \frac{12}{0^-} = -\infty \end{aligned}$$

La recta $x = -1$ **es una asíntota vertical de ramas divergentes**

Estudiemos ahora el comportamiento de la función cuando $x \to +\infty$ y cuando $x \to -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \text{"}\frac{+\infty}{+\infty}\text{"}$

dividiendo numerador y denominador por x^3; el límite quedará así:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \lim_{x \to +\infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{10}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{5}{x^3}} = \frac{0^+}{1} = 0^+$$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \text{"}\frac{\infty}{-\infty}\text{"}$

dividiendo numerador y denominador por x^3; el límite quedará así:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{4x^2 + 2x + 10}{x^3 + x^2 + 5x + 5} = \lim_{x \to -\infty} \frac{\frac{4}{x} + \frac{2}{x^3} + \frac{10}{x^3}}{1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{x^2} + \frac{5}{x^3}} = \frac{0^-}{1} = 0^-$$

Por lo tanto; **la recta $y = 0$ es una asíntota horizontal.**
Solución b
$\int \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}dx$
Para calcular la integral anterior, tendremos que descomponer la fracción $\frac{4x^2+2x+10}{(x^2+5)(x+1)}$ de la siguiente manera:
$\frac{4x^2+2x+10}{(x^2+5)(x+1)} = \frac{A}{x+1}+\frac{Bx+C}{x^2+5} =\!\rightarrow \frac{4x^2+2x+10}{(x^2+5)(x+1)} = \frac{A(x^2+1)+(Bx+C)(x+1)}{(x^2+5)(x+1)}$
De lo que se deduce::

$$4x^2+2x+10 = A(x^2+5)+(Bx+C)(x+1) \qquad (@)$$

Si consideramos en (@) que $x = -1$ y sustituimos tendremos:

$$12 = 6A \rightarrow A = 2$$

Si ahora le damos a $x = 0$ y sustituimos en (@) :

$$10 = 10 + C \rightarrow C = 0$$

Por último, si consideramos en (@) que $x = 1$:

$$16 = 12 + (B)(2) \rightarrow B = 2$$

De esta manera, ya podemos escribir la fracción $\frac{4x^2+2x+10}{(x^2+5)(x+1)}=$ así:

$$\frac{4x^2+2x+10}{(x^2+5)(x+1)} = \frac{2}{x+1}+\frac{2x}{x^2+1}$$

$\int \frac{4x^2+2x+10}{x^3+x^2+5x+5}dx = \int \frac{2}{x+1}dx + \int \frac{2x}{x^2+1}dx = 2\ln(x+1) + \ln\left(x^2+5\right) + C$

$$H(x) = 2\ln(x+1) + \ln\left(x^2+5\right) + C$$

como por hipótesis nos dicen que $H(0) = 0$

$$0 = 2\ln 1 + \ln 5 + C \rightarrow C = -\ln 5$$

La función que nos han pedido con esa condición es:

$$\begin{aligned} H(x) &= 2\ln(x+1) + \ln\left(x^2+5\right) - \ln 5 \\ H(x) &= \ln\left|\frac{(x+1)^2(x^2+5)}{5}\right| \end{aligned}$$

Exercise 12 *Dadas las fuciones reales $f(x) = 12x^3 - 8x^2 + 9x - 5$ y $g(x) = 6x^2 - 7x + 2$ se pide lo siguiente:*
a) Determina las ecuaciones de las asíntotas a la gráfica de la función $\frac{f(x)}{g(x)}$
b)Calcula la función $H(x) = \int \frac{f(x)}{g(x)}dx$ que cumpla $H(1) = 1$

Solución a)

La función $t(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2}$ es tal que su dominio de definición y de continuidad es:

$D(f) = \mathbb{R} \sim \left\{x \in \mathbb{R} \ / \ 6x^2 - 7x + 2 = 0\right\}$

Resolviendo la ecuación por factorización

$$6x^2 - 7x + 2 = 0 \rightarrow x = \begin{cases} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{2} \end{cases},$$

Podemos concluir que

$$D(f) = \mathbb{R} \sim \left\{\frac{2}{3}, \frac{1}{2}\right\}$$

Nota: La descomposición factorial de $6x^2 - 7x + 2$ es:

$$6x^2 - 7x + 2 = 6(x - \frac{1}{2})((x - \frac{2}{3})$$

La función no es continua ni para $x = \frac{2}{3}$ ni para $x = \frac{1}{2}$; ya que para dichos valores no existe imagen

Calculemos pues sus límites laterales

a) Para $x = \dfrac{1}{2}$

$$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^+} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{2}{3})} = \frac{-1}{6 \cdot 0^+(-\frac{1}{6})} = \frac{-1}{0^-} = +\infty$$

$$\lim_{x \to (\frac{1}{2})^-} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{2}{3})} = \frac{-1}{6 \cdot 0^-(-\frac{1}{6})} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

La recta $x = \frac{1}{2}$ es una asíntota vertical de ramas divergentes

b) Para $x = \frac{2}{3}$

$$\lim_{x \to \left(\frac{2}{3}\right)^+} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{2}{3})} = \frac{1}{6 \cdot (\frac{1}{6})0^+} = \frac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x \to \left(\frac{2}{3}\right)^-} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6(x - \frac{1}{2})(x - \frac{2}{3})} = \frac{1}{6 \cdot (\frac{1}{6})0^-} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

La recta $x = \frac{2}{3}$ es una asíntota vertical de ramas divergentes

Esta función no tiene asíntotas horizontales ; ya que:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x \to +\infty} 2x = +\infty$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{12x^3 - 8x^2 + 9x - 5}{6x^2 - 7x + 2} \lim_{x \to -\infty} \frac{12x^3}{6x^2} = \lim_{x \to -\infty} 2x = -\infty$$

Si que tiene asíntota oblícua. Para determinarla vamos a efectuar la división de ambos polinomios:

$$\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}=2x+1+\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}$$

La asíntota oblícua es la recta

$$y=2x+1$$

Puesto que:
Si $x\to+\infty$ entonces $\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}\to 0^+$ y $\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}\to(2x+1)^+$
Si $x\to-\infty$ entonces $\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}\to 0^-$ y $\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}\to(2x+1)^-$
Es más ; inclusive podemos afirmar que la gráfica y la asíntota oblícua se van a cortar en el punto de abcisa $x=\frac{7}{12}$ e $y=\frac{13}{6}$
Comprobémoslo; resolviendo el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} y=2x+1+\frac{12x-7}{6x^2-7x+2} \\ y=2x+1 \end{array}\right\} \to \frac{12x-7}{6x^2-7x+2}=0\to x=\frac{7}{12}$$

$$\text{Si } x = \frac{7}{12}\to y=2\frac{7}{12}+1=\frac{13}{6}$$

b) Para calcular la integral $\int\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx$ teniendo presenta lo anterior:

$$\int\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx=\int\left[2x+1+\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}\right]dx$$

La primera integral $\int(2x+1)\,dx=x^2+x+C$
La segunda $\int\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}dx=\ln\left|6x^2-7x+2\right|$
Con lo que:

$$\int\frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx=x^2+x+\ln\left|6x^2-7x+2\right|+C$$

La integral $\int\frac{12x-7}{6x^2-7x+2}dx$ también la podemos también resolver descomponiendo la fracción que hay dentro de la integral de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\frac{12x-7}{6(x-\frac{1}{2})((x-\frac{2}{3})} &= \frac{1}{6}\left[\frac{A}{(x-\frac{1}{2})}+\frac{B}{(x-\frac{2}{3})}\right]\\ \frac{12x-7}{6(x-\frac{1}{2})((x-\frac{2}{3})} &= \frac{A(x-\frac{2}{3})+B(x-\frac{1}{2})}{6(x-\frac{1}{2})((x-\frac{2}{3})}\end{aligned}$$

De donde obtenemos:

$$12x-7=A(x-\frac{2}{3})+B(x-\frac{1}{2}) \qquad (@@)$$

Si asignamos en (@@) a x el valor $\frac{1}{2}\to-1=A\left(-\frac{1}{6}\right)\to A=6$

Si asignamos en (@@) a x el valor $\frac{2}{3} \rightarrow 1 = B\left(\frac{1}{6}\right) \rightarrow B = 6$
Como

$$\frac{12x-7}{6(x-\frac{1}{2})((x-\frac{2}{3})} = \frac{1}{6}\left[\frac{6}{(x-\frac{1}{2})} + \frac{6}{(x-\frac{2}{3})}\right] = \frac{1}{(x-\frac{1}{2})} + \frac{1}{(x-\frac{2}{3})}$$

entonces:

$$\begin{aligned}
\int \frac{12x-7}{6(x-\frac{1}{2})((x-\frac{2}{3})}dx &= \int \frac{1}{(x-\frac{1}{2})}dx + \int \frac{1}{(x-\frac{2}{3})}dx \\
\int \frac{12x-7}{6(x-\frac{1}{2})((x-\frac{2}{3})}dx &= \ln\left|x-\frac{1}{2}\right| + \ln\left|x-\frac{2}{3}\right| + C'
\end{aligned}$$

Resultado final:

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int \frac{12x^3-8x^2+9x-5}{6x^2-7x+2}dx = x^2+x+\ln\left|6x^2-7x+2\right| - \ln 6 + C\,' \\
H(x) &= x^2+x++\ln\left|6x^2-7x+2\right| + C
\end{aligned}$$

Como nos dicen que $H(1) = 1$ sustituyendo; tendremos:

$$\begin{aligned}
1 &= H(x) = 1^2 + 1 + \ln|1| + C \\
C &= -1
\end{aligned}$$

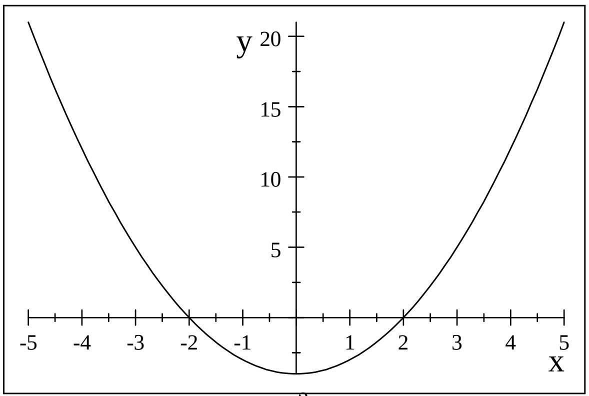
La función que nos han pedido es:

$$H(x) = x^2 + x - 1 + \ln\left|6x^2-7x+2\right|$$

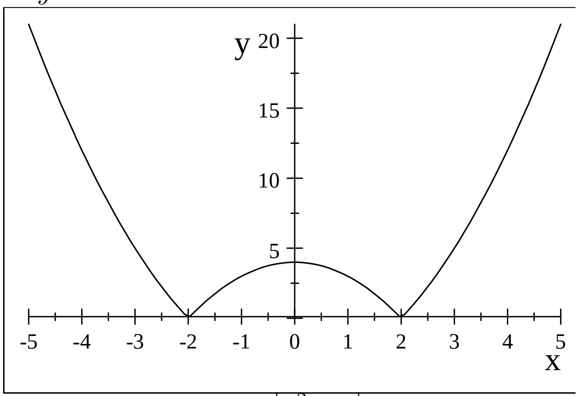
Exercise 13 *A) Dibuja la gráfica de la función* $f(x) = \left|x^2 - 4\right|$
b) Determina los máximos y mínimos absolutos de esta función en $[-1, 4]$
c) Determina el área comprendida entre la gráfica de $y = \left|x^2 - 4\right|$ *,las rectas verticales* $x = -1$ *,* $x = 4$ *y el eje de las* X

Solución

A) En primer lugar dibujamos la gráfica de la parábola $y = x^2 - 4$



$y = x^2 - 4$



$y = \left|x^2 - 4\right|$

Determinamos los puntos de corte de la parábola con el eje de las x

$$\left.\begin{array}{c} y = x^2 - 4 \\ y = 0 \end{array}\right\} \rightarrow 0 = x^2 - 4 \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$$

La parábola corta al eje de las x en $P(2, 0)$ y $Q(-2, 0)$

Definimos ahora la función $f(x) = \left|x^2 - 4\right| = \begin{cases} x^2 - 4 & \text{si } x \leq -2 \\ -x^2 + 4 & \text{si} - 2 < x \leq 2 \\ x^2 - 4 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

La función derivada primera es $f\ '(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x < -2 \\ -2x & \text{si} - 2 < x < 2 \\ 2x & \text{si } x > -2 \end{cases}$.

Resaltemos el hecho de que la función no es derivable en los puntos de abcisa $x = -2$ y $x = 2$ (son puntos angulosos)

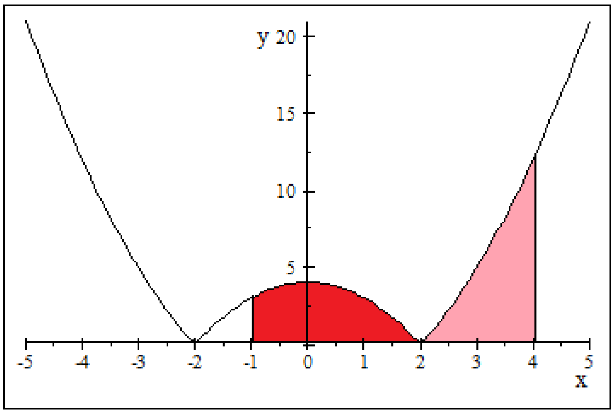
La función derivada segunda es $f\ ''(x) = \begin{cases} 2 & \text{si } x < -2 \\ -2 & \text{si} - 2 < x < 2 \\ 2 & \text{si } x > -2 \end{cases}$

B) A la vista de la gráfica; podemos afirmar que los máximos y mínimos absolutos de la función $y = \left|x^2 - 4\right|$ en $[-1, 4]$ son:

$$\begin{array}{rcl} \text{El máximo absoluto de } y & = & \left|x^2 - 4\right| \text{ en } [-1, 4] \text{ es } H(4, 12) \\ \text{El mínimo absoluto de } y & = & \left|x^2 - 4\right| \text{ en } [-1, 4] \text{ es } P(2, 0) \end{array}$$

Nota 1: El punto de coordenadas $T(0, 4)$ es un máximo local de la función ($f\ '(0) = 0$ y $f\ ''(0) = -2 < 0$); sin embargo, no es máximo absoluto de $y = \left|x^2 - 4\right|$ en $[-1, 4]$

C) Para calcular el área comprendida entre la función $y = \left|x^2 - 4\right|$ las rectas $x = -1$ y $x = 4$ y el eje de las X calcularemos dos integrales



$y = |x^2 - 4|$

$$\int_{-1}^{2} (-x^2 + 4)dx = \left[-\tfrac{x^3}{3} + 4x\right]_{-1}^{2} = -\tfrac{2^3}{3} + 8 - \left(-\tfrac{(-1)^3}{3} - 4\right) = 9$$

$$\int_{2}^{4} (x^2 - 4)dx = \left[\tfrac{x^3}{3} - 4x\right]_{2}^{4} = \tfrac{4^3}{3} - 16 - \left(\tfrac{2^3}{3} - 8\right) = \tfrac{32}{3}$$

El área pedida es

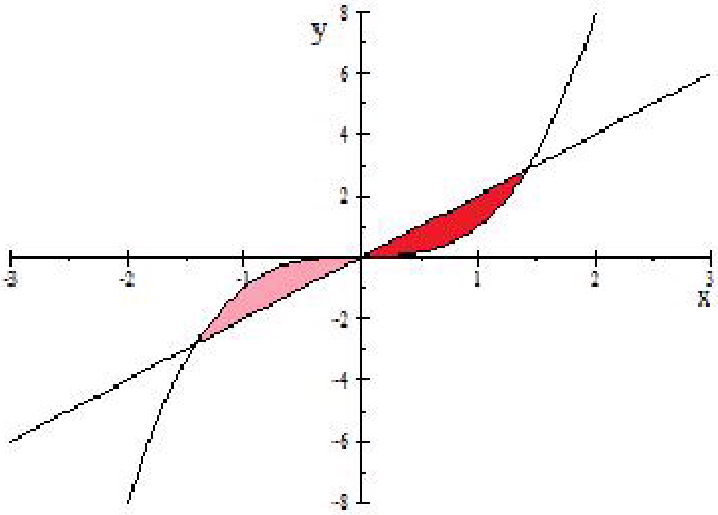
$$A = \int_{-1}^{2} (-x^2 + 4)dx + \int_{2}^{4} (x^2 - 4)dx = 9 + \frac{32}{3} = \frac{59}{3} \text{ u}^2$$

Exercise 14 *Determina el valor de λ ($\lambda > 0$) para que el área comprendida entre las funciones $f(x) = x^3$ y $g(x) = \lambda x$ valga 2 u^2*

Determinamos los puntos de corte entre ambas funciones

$$\left.\begin{array}{l} y = x^3 \\ y = \lambda x \end{array}\right\} \to x^3 - \lambda x = 0 \to \left\{\begin{array}{c} x = 0 \\ x = \sqrt{\lambda} \\ x = -\sqrt{\lambda} \end{array}\right.$$

Ambas gráficas se cortan en $O(0,0), P(\sqrt{\lambda}, \lambda\sqrt{\lambda})$ y Q$(-\sqrt{\lambda}, -\lambda\sqrt{\lambda})$



Como ambas funciones son impares dicha área coincide con:

$$2\int_0^{\sqrt{\lambda}} \left(\lambda x - x^3\right) dx = 2\left[\lambda \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{4}\right]_0^{\sqrt{\lambda}} = 2\left[\frac{\lambda^2}{2} - \frac{\lambda^2}{4}\right] = \frac{\lambda^2}{2}$$

Al valer dicha área 2 u^2, resolviendo la ecuación

$$\frac{\lambda^2}{2} = 2 \to \lambda = \left\{\begin{array}{l} 2 \\ -2 \text{ no me interesa} \end{array}\right.$$

Exercise 15 *Resolver y discutir el sistema* $\left\{\begin{array}{l} \alpha x+y+z=1 \\ x+\alpha y+z=1 \\ x+y+\alpha z=1 \end{array}\right.$ *según los valores del párametro* α*. Resuelve el sistema cuando* $\alpha=0$

Solución:

La matriz de coeficientes del sistema y la matriz ampliada son :

$$A=\left(\begin{array}{ccc} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{array}\right) \rightarrow A'=\left(\begin{array}{cccc} \alpha & 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha & 1 \end{array}\right)$$

Empezamos calculando el determinante de la matriz de coeficientes del sistema

$|A|=\left|\begin{array}{ccc} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{array}\right|=\alpha^3-3\alpha+2$

Factorizando dicho polinomio tendremos

$$|A|=\alpha^3-3\alpha+2=(\alpha+2)(\alpha-1)^2$$

Casos que se pueden presentar

1 Si $\alpha \neq 1$ y $\alpha \neq -2 \rightarrow |A| \neq 0$

Por lo tanto

$$Rango\ A = Rango\ A' = 3 \text{ (n}^o\text{ incógnitas)}$$

Y en virtud del Teorema de Rouche-Frobenius; *el sistema es compatible determinado.*

Para obtener sus soluciones utilizaremos la regla de Cramer; con lo que:

$$\begin{aligned} x &= \frac{\left|\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{array}\right|}{|A|}=\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{(\alpha+2)(\alpha-1)^2}=\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+2)(\alpha-1)^2}=\frac{1}{\alpha+2} \\ y &= \frac{\left|\begin{array}{ccc} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & \alpha \end{array}\right|}{|A|}=\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{(\alpha+2)(\alpha-1)^2}=\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+2)(\alpha-1)^2}=\frac{1}{\alpha+2} \\ z &= \frac{\left|\begin{array}{ccc} \alpha & 1 & 1 \\ 1 & \alpha & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{array}\right|}{|A|}=\frac{\alpha^2-2\alpha+1}{(\alpha+2)(\alpha-1)^2}=\frac{(\alpha-1)^2}{(\alpha+2)(\alpha-1)^2}=\frac{1}{\alpha+2} \end{aligned}$$

2 Si $\alpha=1 \rightarrow |A|=0 \rightarrow Rango\ A<3$

Particularizando ambas matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Es evidente que

$$Rango\ A = Rango\ A' = 1 < 3 \text{ (n}^o \text{ incógnitas)}$$

Por el teorema de Rouche-Frobenius; *el sistema es compatible doblemente indeterminado.*

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver la ecuación:

$$x = 1 - y - z$$

Con lo que el conjunto solución del sistema será:

$$S = \{(1 - a - b, a, b) \ / \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

3 Si $\alpha = -2$

Particularizamos ambas matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow A' = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Como $|A| = 0 \rightarrow Rango\ A < 3$ (las tres columnas de A son linealmente dependientes)

Al ser $\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = 3 \neq 0 \rightarrow$La 1^a y $2\ ^a$ columna de A son linealmente independientes ;siendo la 3^a columna combinación lineal de las anteriores.

El rango de la matriz A es 2

Pasemos pues; a calcular el rango de la matriz ampliada teniendo en cuenta que:

$$Rango\ A' = Rang \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Como

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 9 \neq 0$$

Entonces el Rango de $A\ '$ es 3

Al no coincidir los rangos de ambas matrices, por el teorema de Rouche-Frobenius, *el sistema será incompatible*

B) La solución del sistema para $\alpha = 0$ es la siguiente

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{0+2} = \tfrac{1}{2} \\ y &= \tfrac{1}{0+2} = \tfrac{1}{2} \\ z &= \tfrac{1}{0+2} = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

Exercise 16 *Sean I y A las matrices cuadradas siguientes* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$,
$A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}$
Se pide calcular, escribiendo explícitamente las operaciones necesarias:
a) Las matrices A^2 y A^3
b) Los números reales α y β para los que se verifica $(I+A)^3 = \alpha I + \beta A$

Solución

$$
\begin{aligned}
&A = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} \\
&A^2 = \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -I \\
&A^3 = A^2 \cdot A = -I \cdot A = -A \\
&I + A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Al conmutar las matrices I y la matriz A se verifica la siguiente igualdad notable:

$$(I+A)^3 = A^3 + 3A^2I + 3AI^2 + I^3$$

Teniendo en cuenta que $\begin{bmatrix} A^3 = -A \\ A^2 = -I \\ I^2 = I \\ I^3 = I \end{bmatrix}$ obtendremos

$$(I+A)^3 = -A + 3(-I)I + 3AI + I = -2I + 2A$$

Por lo tanto; $\alpha = -2$ y $\beta = 2$
Comprobemos que está bien, realizando todos los cálculos:

$$
\begin{aligned}
&(I+A)^2 = \begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 & 58 \\ -20 & -34 \end{pmatrix} \\
&(I+A)^3 = \begin{pmatrix} 34 & 58 \\ -20 & -34 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & 29 \\ -10 & -16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 58 \\ -20 & -36 \end{pmatrix} \\
&\alpha I + \beta A = \alpha \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 17 & 29 \\ -10 & -17 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha + 17\beta & 29\beta \\ -10\beta & \alpha - 17\beta \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Igualando las dos últimas expresiones:

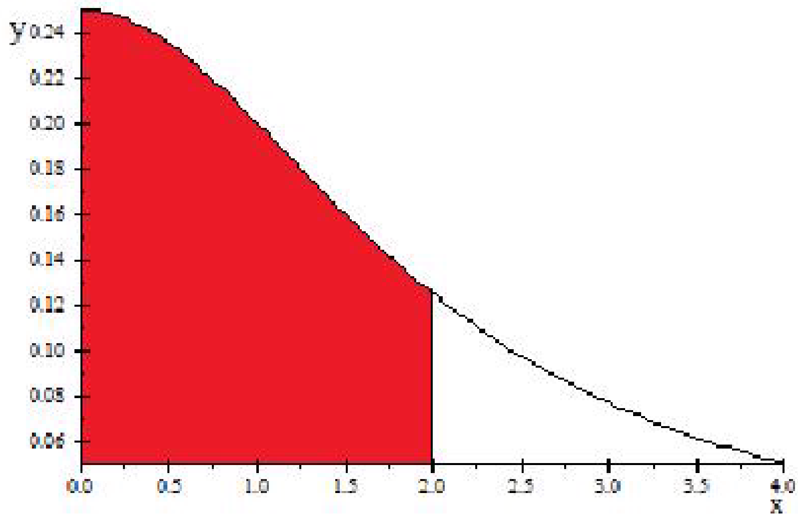
$$\left.\begin{array}{c} \alpha + 17\beta = 32 \\ 29\beta = 58 \\ -10\beta = -20 \\ \alpha - 17\beta = -36 \end{array}\right\} \rightarrow \alpha = -2, \beta = 2$$

Exercise 17 *Se considera en el primer cuadrante la región R del plano limitado por el eje X, el eje Y, la recta $x = 2$ y la curva $y = \dfrac{1}{4+x^2}$*
a) Calcular razonadamente el área de la región R
b) Encontrar el valor de α para que la recta $x = \alpha$ divida la región R en dos partes A (izquierda) y B (derecha) tales que el área de A sea el doble que la de B

Solución
En primer lugar calculamos la primitiva de la función dada

$$\int \frac{1}{4+x^2}\,dx = \frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}x + C$$

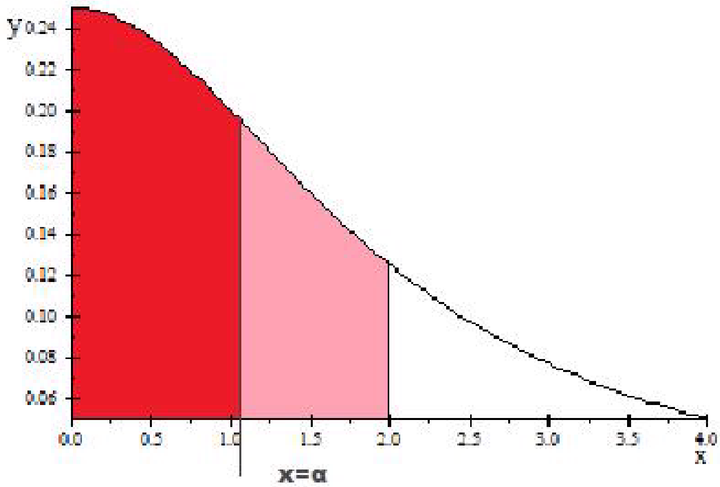
En segundo lugar dibujamos su gráfica para $x \geq 0$:



El área de la región R es:

$$\int_0^2 \frac{1}{4+x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}x\right]_0^2 = \frac{1}{2}\arctan 1 = \frac{1}{2}\frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8}\ u^2$$

b) La región R anterior la dividimos mediante la recta $x = \alpha$ en dos zonas A (roja) y B (rosa)



$$Área \text{ de } A = \int_0^{\alpha} \frac{1}{4+x^2}\, dx = \left[\tfrac{1}{2}\arctan \tfrac{1}{2}x\right]_0^{\alpha} = \tfrac{1}{2}\arctan\frac{\alpha}{2}$$

y

$$Área \text{ de } B = \int_{\alpha}^{2} \frac{1}{4+x^2}\, dx = \left[\tfrac{1}{2}\arctan \tfrac{1}{2}x\right]_{\alpha}^{2} = \tfrac{\pi}{8} - \tfrac{1}{2}\arctan\frac{\alpha}{2}$$

como nos indican la condición:

$$Área \text{ de } A = 2Área \text{ de } B$$

Tendremos que resolver la ecuación:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\arctan\frac{\alpha}{2} &= \frac{\pi}{4} - \arctan\frac{\alpha}{2} \\ \arctan\frac{\alpha}{2} &= \frac{\pi}{6} \rightarrow \frac{\alpha}{2} = \tan\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3} \\ \alpha &= \frac{2\sqrt{3}}{3} \end{aligned}$$

$$A = \int_0^{\frac{2\sqrt{3}}{3}} \frac{1}{4+x^2}\, dx = \tfrac{1}{12}\pi$$

$$B = \int_{\frac{2\sqrt{3}}{3}}^{2} \frac{1}{4+x^2}\, dx = \tfrac{1}{24}\pi$$