Título: Sistemas de ecuaciones lineales

Autor:© Juan José Isach Mayo

Fecha:04 Septiembre del 2007

Contents

1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES **5**
1.1 Conceptos 5
1.2 Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes 7
1.2.1 Transformaciones de equivalencia 8
1.3 Método de Gauss 8
1.3.1 Ejemplos y ejercicios 13
1.4 Cuestiones 23
1.5 Problemas de planteamiento y aplicación 25
1.6 Actividades de evaluación 35
1.6.1 Ejercicios recomendados 35
1.6.2 Ejercicios selectividad año 2000 (Otras comunidades) . . . 40
1.6.3 Ejercicios selectividad Comunidad Valenciana 42
1.6.4 Exámenes personales 57

2 Límites **63**
2.1 Conceptos previos 63
2.2 Límites de una función en un punto 63
2.2.1 a)Función convergente en x_0 63
2.2.2 b) Función continua en x_0 66
2.2.3 c) Función divergente a $+\infty$ en x_0 69
2.2.4 d) Función divergente a -∞ en x_0 70
2.2.5 e) Inexistencia del límite 71
2.3 Algebra de los límites 73
2.4 Técnicas de cálculo de límites 76
2.4.1 *a) Técnicas de cancelación* 76
2.4.2 *b) Técnicas de racionalización* 78
2.4.3 *b) Técnicas de cálculo* 81
2.4.4 Ejercicios de límites de una función en un punto 84
2.5 Teoremas para calcular límites: 86
2.5.1 Función convergente a cero por función acotada en un punto 86
2.5.2 *Criterio del emparedado* 86
2.6 Infinitésimos 88
2.7 Límites en el infinito 93

3 Continuidad **95**
3.1 Definiciones 95
3.2 Discontinuidades 96
3.3 Operaciones con funciones continuas 97

3.4 Discontinuidad de algunas funciones 97
3.5 Propiedades de las funciones continuas en un punto 97
3.6 Propiedades de las funciones continuas en un cerrado 98
3.7 Problemas continuidad 101

Chapter 1

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

1.1 Conceptos

Definicion Llamaremos sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas a un conjunto de m ecuaciones de la forma:

$$\clubsuit \left\{ \begin{array}{l} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + ... + a_{2,n}x_n = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + ... + a_{3,n}x_n = b_3 \\ ..... \\ ..... \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + ... + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right.$$

siendo $a_{i,j}$[1] y b_i [2]$\in \Re$ con i variando de 1a m y j variando de 1 a n
Las $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ son las incógnitas a determinar

Ejemplos

a) $\left\{ \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = -1 \end{array} \right.$ b) $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - z = -2 \end{array} \right.$

c) $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - z = -2 \\ 2x - 3y - 5z = 0 \end{array} \right.$ d) $\left\{ \begin{array}{l} 3x + 2y = 1 \\ x - 3y = -2 \\ 2x + 5y = 3 \end{array} \right.$

Observa que la notación utilizada en algunos sistemas para representar las incógnitas no se realiza mediante subíndices. Por simple comodidad, se suelen sustituir las incógnitas $x_1, x_2, x_3....$ por $x, y, z, ...$

En cualquier sistema de ecuaciones lineales puede ocurrir que:

1. $m > n$ mayor número de ecuaciones que incógnitas→ejemplos d)
2. $m = n$ igual número de ecuaciones que incógnitas→ejemplo c)
3. $m < n$ menor número de ecuaciones que incógnitas→ejemplos a) y b)

[1] Los coeficientes $a_{i,j}$ se denominan coeficientes de las incógnitas
[2] Los b_i se denominan términos independientes

Contraejemplos

$$\begin{cases} 3x_1^2 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 = 1 \\ -2x_1 - 4x_2 + 5x_3 + x_4 = 3 \\ x_1 + 2x_2 - x_4 = -1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\sqrt{x} + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y - z = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x^2 + 2y + 3z = 1 \\ x - 3y^3 - z = -2 \\ 2x - 3y - 5z^4 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3\sqrt{x} + 2\sqrt{y} = 1 \\ \sqrt{x} - 3y = -2 \end{cases}$$

Definicion <u>**Solución de un sistema**</u>

Llamaremos solución del sistema ♣ a toda n-tupla $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4..., \alpha_n)$ tal que al sustituir x_1 por α_1,x_2 por α_2,x_3 por α_3,....,x_n por α_n en todas las ecuaciones del sistema ♣ obtengamos identidades

Ejemplos

1)El sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 3x + y = 7 \end{cases}$ admite como solución el par $(2, 1)$ ya que al sustituir x por 2 e y por 1 en ambas ecuaciones obtenemos identidades

$$\begin{cases} 2 \cdot 2 - 1 = 3 \\ 3 \cdot 2 + 1 = 7 \end{cases}$$

2)El sistema $\begin{cases} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + y - z = 2 \\ 3x - y + 4z = 4 \end{cases}$ admite como solución la terna $(\frac{9}{10}, \frac{7}{10}, \frac{1}{2})$ ya que al sustituir x por $\frac{9}{10}$, y por $\frac{7}{10}$,y z por $\frac{1}{2}$ en las tres ecuaciones obtenemos identidades

$$\begin{cases} \frac{9}{10} - 2 \cdot \frac{7}{10} + 3 \cdot \frac{1}{2} = 1 \\ 2 \cdot \frac{9}{10} + \frac{7}{10} - \frac{1}{2} = 2 \\ 3 \cdot \frac{9}{10} - \frac{7}{10} + 4 \cdot \frac{1}{2} = 4 \end{cases}$$

3)El sistema $\begin{cases} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - 3y + 5z = 2 \end{cases}$ admite como solución todas las ternas de la forma $(1 - 3z, -\frac{z}{3}, z)$ con $z \in \Re$. Ya que al sustituir x por $1 - 3z$, y por $-\frac{z}{3}$,y z por z en ambas ecuaciones obtenemos identidades

$$\begin{cases} 1 - 3z - 3\left(-\frac{z}{3}\right) + 2z = 1 \\ 2(1 - 3z) - 3\left(-\frac{z}{3}\right) + 5z = 2 \end{cases}$$

Es necesario resaltar, que según los valores que asignemos a z obtendremos distintas soluciones para el sistema (admite infinitas soluciones)

4)El sistema $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ 4x - 2y = 8 \end{cases}$ es evidente que no tiene solución; ya que para cualquier par de valores x, y que verifiquen la 1ª ecuación, éstos nunca pueden verificar la 2^a

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

a) Según los términos independientes

$$\textbf{Sistemas}\begin{cases} \text{Homogéneos}\rightarrow\text{Todos los términos independientes nulos} \begin{cases} 3x+2y+3z=0 \\ x-3y-z=0 \\ 2x-3y-5z=0 \end{cases} \\ \text{Heterogéneos: algún término independientes no nulo} \begin{cases} 3x+2y+3z=1 \\ x-3y-z=-2 \\ 2x-3y-5z=0 \end{cases} \end{cases}$$

b) Según sus soluciones

$$\textbf{Sistemas}\begin{cases} \textbf{Compatibles} \rightarrow \text{Tienen solución} \begin{cases} \text{Determinados}\rightarrow\text{solución única} \\ \text{Indeterminados}\rightarrow\text{Infinitas soluciones} \end{cases} \\ \textbf{Incompatibles} \rightarrow \text{No tienen solución} \end{cases}$$

Nota : Los sistemas homogéneos son siempre compatibles; ya que al menos una solución será la trivial (todas las incógnitas nulas)

1.2 Sistemas de ecuaciones lineales equivalentes

Dos sistemas de ecuaciones lineales diremos que son equivalentes siempre y cuando tengan ambos el mismo conjunto solución.

Ejemplos:

1) Los sistemas $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x-y=3 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+2y=8 \end{cases}$ son equivalentes ya que la solución de ambos es el par $(1,2)$

2) Los sistemas $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 3x+2y+2z=7 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y+z=3 \\ 4x+2y-z=5 \\ 2x-y+z=2 \end{cases}$ son equivalentes ya que la solución de ambos es la terna $(1,1,1)$

3) Los sistemas $\begin{cases} x+y=3 \\ 2x+2y=6 \end{cases}$ y $\begin{cases} x+y=3 \\ 3x+3y=9 \end{cases}$ son equivalentes ya que la solución en ambos es el conjunto $H=\{(x,3-x)/x\in\Re\}$

1.2.1 Transformaciones de equivalencia

¿ Qué transformaciones pueden hacerse en un sis0tema de manera que lo conviertan en uno equivalente y más sencillo de resolver?

Las siguientes transformaciones realizadas en cualquier sistema lo convierten en otro equivalente:

a) Cambiar el orden de las ecuaciones

b) Multiplicar cualquier ecuación por un número real no nulo

c) Sustituir una ecuación por una C.Lineal de ella misma con las demás siempre que el coeficiente por el que multipliquemos la ecuación sustituida sea no nulo

d) Eliminar una ecuación que sea C. Lineal de las demás

1.3 Método de Gauss

Las transformaciones de equivalencia anteriores, nos van a permitir determinar cuando un sistema es compatible y además en caso de serlo como determinar sus soluciones

Utilizando las transformaciones anteriores obtendremos un sistema equivalente al inicial de manera que:

a) *En la 1^aecuación aparezca al menos la 1ª incógnita*

b) *En la 2^aecuación no aparezca la 1ª incógnita*

c) *En la 3^aecuación no aparezca la 1ª incógnita, ni tampoco la 2^a*

d) *En la 4^aecuación no aparezca la 1ª incógnita , ni la 2^a, ni tampoco la 3^a*

Y así sucesivamente hasta triangularizar el sistema; pudiendo obtener:

I) *Un sistema con el mismo número de ecuaciones que incógnitas. Sistema Compatible Determinado*

II) *En alguna ecuación algún absurdo.Sistema Incompatible*

III) *Un sistema con menor número de ecuaciones que incógnitas. Sistema Compatible Indeterminado*

Este procedimiento recibe el nombre de método de reducción o de Gauss

Ahora bien. ¿Cómo lo conseguimos?

Vamos a explicarlo para un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

Dado el sistema ♣ $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + ... + a_{2,n}x_n = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + ... + a_{3,n}x_n = b_3 \\ ..... \\ ..... \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + ... + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$

Buscamos un coeficiente asociado a alguna incógnita no nulo y reorganizamos las ecuaciones del sistema, así como los sumandos de éstas de tal manera que $a_{1,1} \neq 0$ (este elemento se denomina pivote)

Realizamos las siguientes transformaciones en las $2^a, 3^a, ..., m-ésima$ ecuaciones . A cada una de ellas, le sumamos una combinación lineal de la primera de la siguiente manera:

$$2^a ec\ nueva = 2^a ec - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot 1^a ec$$

Quedando los nuevos coeficientes de la segunda ecuación así:

$c_{2,j} = a_{2,j} - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot a_{1,j}$ con j variando de 1 a n $\qquad b_2^{'} = b_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot b_1$

$$3^a ec\ nueva = 3^a ec - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot 1^a ec$$

Quedando los nuevos coeficientes de la tercera ecuación así:

$c_{3,j} = a_{3,j} - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \cdot a_{1,j}$ con j variando de 1 a n $\qquad b_3^{'} = b_3 - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \cdot b_1$

.....

$$m - ésima\ ec\ nueva = m - ésima\ ec - \frac{a_{m,1}}{a_{1,1}} \cdot 1^a ec$$

Quedando los nuevos coeficientes de la segunda ecuación así:

$c_{m,j} = a_{m,j} - \frac{a_{m,1}}{a_{1,1}} \cdot a_{1,j}$ con j variando de 1 a n $\qquad b_m^{'} = b_m - \frac{a_{m,1}}{a_{1,1}} \cdot b_1$

Con estas transformaciones[3], conseguimos que los coeficientes $c_{k,1}$ con k variando de 2 a m sean nulos. Quedando el siguiente sistema

$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ c_{2,2}x_2 + c_{2,3}x_3 + ... + c_{2,n}x_n = b_2^{'} \\ c_{3,2}x_2 + c_{3,3}x_3 + ... + c_{3,n}x_n = b_3^{'} \\ ..... \\ ..... \\ c_{m,2}x_2 + c_{m,3}x_3 + ... + c_{m,n}x_n = b_m^{'} \end{cases}$ equivalente al sistema inicial ♣

De este sistema, extraemos el subsistema $\begin{cases} c_{2,2}x_2 + c_{2,3}x_3 + ... + c_{2,n}x_n = b_2^{'} \\ c_{3,2}x_2 + c_{3,3}x_3 + ... + c_{3,n}x_n = b_3^{'} \\ ..... \\ ..... \\ c_{m,2}x_2 + c_{m,3}x_3 + ... + c_{m,n}x_n = b_m^{'} \end{cases}$

[3] Conseguimos un sistema equivalente al anterior, donde la incógnita $x_1$sólo aparece en la1^a ecuación

Nota: Si alguno de los $a_{i,1}$ fuese ya nulo, no sería necesario modificar su ecuación correspondiente

y repetimos el procedimiento anterior para conseguir que la incógnita x_2 desaparezca en todas las ecuaciones menos en una (bastará con encontrar algún $c_{i,2}$ no nulo con i variando de 2 a m)

Iterando este procedimiento tantas veces como sea necesario, obtendremos un sistema equivalente al inicial donde:

En la 1^aecuación aparezca al menos la 1ª incógnita

En la 2^aecuación no aparezca la 1ª incógnita

En la 3^aecuación no aparezca la 1ª incógnita, ni tampoco la 2^a

En la 4^aecuación no aparezca la 1ª incógnita , ni la 2^a, ni tampoco la 3^a

Atendiendo a la disposición final de las incógnitas, se pueden presentar las siguientes posibilidades

a)Que el sistema final tenga el mismo número de ecuaciones que incógnitas

$$\left\{\begin{array}{r} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + ... + a_{2,n}x_n = b_2 \\ +a_{3,3}x_3 + ... + a_{3,n}x_n = b_3 \\ ..... \\ ..... \\ a_{n,n}x_n = b_n \end{array}\right. \quad \textit{donde } a_{i,i} \textit{ no nulos}$$

El sistema es compatible determinado. Se calcula la incógnita x_n de la última ecuación, se sustituye en las anteriores y se calcula x_{n-1} , y así sucesivamente hasta obtener el valor de x_1.

Ejemplo:Resuelve el sistema $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 3x + y - 4z = 5 \end{array}\right.$

Realizamos las siguientes transformaciones$\rightarrow$ $\begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 3 \cdot 1^a ec \end{array}$

quedando el siguiente sistema equivalente $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ 7y - 7z = 0 \\ 7y - 13z = 2 \end{array}\right.$

Si dividimos la $2^a ec$ por 7 tendremos $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 0 \\ 7y - 13z = 2 \end{array}\right.$

Por último si a la $3^a ec$ le restamos la segunda multiplicada por 7 ($3^a ecnueva = 3^a ec - 7 \cdot 2^a ec$) tendremos:

$$\left\{\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 0 \\ -6z = 2 \end{array}\right.$$

De la $3^a ec$ obtenemos que $z = \dfrac{-1}{3}$

Sustituyendo dicho valor en la $2^a ec$ y despejando "y" tendremos $y = \dfrac{-1}{3}$

Sustituyendo los valores obtenidos para "z" e "y" en la $1^a ec$ y despejando "x" $\rightarrow x = \dfrac{4}{3}$

La solución de este sistema es el conjunto $H = \left\{\left(\dfrac{-1}{3}, \dfrac{-1}{3}, \dfrac{4}{3}\right)\right\}$

b)Que obtengamos algún absurdo

$$\left\{\begin{array}{r} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ... + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + ... + a_{2,n}x_n = b_2 \\ +a_{3,3}x_3 + ... + a_{3,n}x_n = b_3 \\ ..... \\ ..... \\ 0 = b_n \end{array}\right. \quad siendo\ b_n \text{ no nulo}$$

El sistema es incompatible

Ejemplo:Resuelve el sistema $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = 5 \end{array}\right.$

Realizamos las siguientes transformaciones$\rightarrow$ $\begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 3 \cdot 1^a ec \end{array}$

quedando el siguiente sistema equivalente $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ 7y - 7z = 0 \\ 7y - 7z = 2 \end{array}\right.$

Si dividimos la $2^a ec$ por 7 tendremos $\left\{\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 0 \\ 7y - 7z = 2 \end{array}\right.$

Por último si a la $3^a ec$ le restamos la segunda multiplicada por 7 ($3^a ecnueva = 3^a ec - 7 \cdot 2^a ec$) tendremos:

$$\left\{\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 0 \\ 0 = 2 \end{array}\right.$$

El sistema está triangularizado y hemos obtenido un absurdo; por lo tanto el sistema es Incompatible

c)Que el sistema final tenga menor número de ecuaciones que incógnitas

$$\left\{\begin{array}{r} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + ... + a_{1,m}x_m + a_{1,m+1}x_{m+1}.. + a_{1,m+r}x_{m+r} = b_1 \\ a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + ... + a_{2,m}x_m + a_{2,m+1}x_{m+1}.. + a_{2,m+r}x_{m+r} = b_2 \\ +a_{3,3}x_3 + ... + a_{3,m}x_m + a_{3,m+1}x_{m+1}.. + a_{3,m+r}x_{m+r} = b_3 \\ ..... \\ ..... \\ a_{m,m}x_m + a_{m,m+1}x_{m+1}.. + a_{m,m+r}x_{m+r} = b_m \end{array}\right.$$

siendo todos los $a_{i,i}$ (elementos de la diagonal) no nulos

En esta situación, el sistema es compatible indeterminado (grado de indeterminación r); ya que de la última ecuación obtendremos x_m en función de las incógnitas (parámetros) $x_{m+1}, x_{m+2}, ...x_{m+r}$. Es evidente que los valores obtendidos para $x_1, x_2, ...x_{m-1}$también dependerán de los valores que asignemos a los parámetros $x_{m+1}, x_{m+2}, ...x_{m+r}$

Ejemplo:Resuelve el sistema $\left\{\begin{array}{l} x - 2y + 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = 3 \end{array}\right.$

Realizamos las siguientes transformaciones$\rightarrow$ $\begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 3 \cdot 1^a ec \end{array}$

quedando el siguiente sistema equivalente $\left\{ \begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ 7y - 7z = 0 \\ 7y - 7z = 0 \end{array} \right.$

Si dividimos las ecuaciones 2^a y 3ª por 7 tendremos $\left\{ \begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 0 \\ y - z = 0 \end{array} \right.$

Por último si a la $3^a ec$ le restamos la segunda ($3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec$) tendremos:

$$\left\{ \begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 0 \\ 0 = 0 \end{array} \right. \Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{r} x - 2y + 3z = 1 \\ y - z = 0 \end{array} \right.$$

El sistema está triangularizado y hemos obtenido menos ecuaciones que incógnitas; por lo tanto el sistema es compatible indeterminado

Para obtener la solución despejamos de la última "y" $\rightarrow y = z$. Sustituyendo este valor en la $1^a ec$ y despejando "x" $\rightarrow x = 1 - z$

El conjunto solución es $H = \{(1 - z, z, z) \,/ z \in \Re\}$

Nota1:Ahora vamos a resolver dos sistemas de tres ecuaciones con tres incógnitas, tal y como los resolvería un ordenador utilizando el método de Gauss explicado con anterioridad

1) $\left. \begin{array}{l} 3x - 2y + 3z = 1 \\ 2x - 3y - z = 2 \\ 4x + 2y - 3z = 1 \end{array} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 \\ 2 & -3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} E_2' = E_2 - \frac{2}{3}E_1 \\ E_3' = E_3 - \frac{4}{3}E_1 \end{array} \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -3 & \frac{4}{3} \\ 0 & \frac{14}{3} & -7 & -\frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$E_3'' = E_3' + \frac{14}{5}E_2' \qquad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & -\frac{5}{3} & -3 & \frac{4}{3} \\ 0 & 0 & -\frac{77}{5} & \frac{17}{5} \end{pmatrix}$$

Con lo que; el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\rightarrow \left. \begin{array}{r} 3x - 2y + 3z = 1 \\ -\frac{5}{3}y - 3z = \frac{4}{3} \\ -\frac{77}{5}z = \frac{17}{5} \end{array} \right\}$$

Cuya solución es

$$S = \left\{ \left(\frac{2}{7}, -\frac{31}{77}, -\frac{17}{77} \right) \right\}$$

2) $\left. \begin{array}{l} x + 2y + 4z - 6t = 4 \\ 2x + 3y - 5z + 4t = -2 \\ 3x - 4y - 3z - 2t = 4 \\ 6x - 5y - 2z + 3t = -3 \end{array} \right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 4 \\ 2 & 3 & -5 & 4 & -2 \\ 3 & -4 & -3 & -2 & 4 \\ 6 & -5 & -2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{array}{l} E_2' = E_2 - 2E_1 \\ E_3' = E_3 - 3E_1 \\ E_4' = E_4 - 6E_1 \end{array} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & -13 & 16 & -10 \\ 0 & -10 & -15 & 16 & -8 \\ 0 & -17 & -26 & 39 & -27 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{l} E_3'' = E_3' - 10E_2' \\ E_4'' = E_4' - 17E_2' \end{array} ; \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & -13 & 16 & -10 \\ 0 & 0 & 115 & -144 & 92 \\ 0 & 0 & 195 & -233 & 143 \end{pmatrix}$$

$$E_4''' = E_4'' - \frac{39}{23}E_3''; \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -6 & 4 \\ 0 & -1 & -13 & 16 & -10 \\ 0 & 0 & 115 & -144 & 92 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{257}{23} & -13 \end{pmatrix}$$

Con lo que; el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\rightarrow \left.\begin{array}{r} x + 2y + 4z - 6t = 4 \\ -y - 13z + 16t = -10 \\ 115z - 144t = 92 \\ \frac{257}{23}t = -13 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es

$$S = \left\{ \left(-\frac{258}{1285}, -\frac{98}{1285}, -\frac{844}{1285}, -\frac{299}{257} \right) \right\}$$

Nota2:Es evidente, que si tuvieramos que resolver todos los sistemas como los dos ejemplos precedentes resolver éstos sería harto complejo. Para evitar estas complicaciones, lee detenidamente los consejos siguientes:

Consejos al aplicar Gauss

1) Buscaremos un coeficiente asociado a una incógnita que valga 1. Reordenaremos las ecuaciones del sistema , de manera que el pivote aparezca en primer lugar (si fuere necesario reordenaremos los sumandos de cada una de las ecuaciones)

2) Abreviaremos el sistema escribiendo sólo los coeficientes de las incógnitas y los términos independientes en una matriz (separaremos los coeficientes del sistema de los términos independientes con una barra. Los coeficientes de cada incógnita han de ocupar la misma columna)

3) Se irán realizando las transformaciones hasta obtener un sistema triangularizado , que nos permita discutir y resolver el sistema

1.3.1 Ejemplos y ejercicios

Ejemplo 1:*Resuelve el sistema* $\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = 1 \\ 3x + y - z = 2 \end{cases}$

Consideramos la matriz $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & & 1 \\ 2 & 3 & -1 & & 2 \\ 3 & 1 & +2 & & 1 \\ 3 & 1 & -1 & & 2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 3 \cdot 1^a ec \\ 4^a ecnueva = 4^a ec - 3 \cdot 1^a ec \end{array}$

$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & & 1 \\ 0 & 7 & 5 & & 0 \\ 0 & 7 & 11 & & -2 \\ 0 & 7 & 8 & & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec \\ 4^a ecnueva = 4^a ec - 2^a ec \end{array} : \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & & 1 \\ 0 & 7 & 5 & & 0 \\ 0 & 0 & 6 & & -2 \\ 0 & 0 & 3 & & -1 \end{array}\right)$

Dividiendo la $3^a ec$ por 2$\rightarrow$: $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & & 1 \\ 0 & 7 & 5 & & 0 \\ 0 & 0 & 3 & & -1 \\ 0 & 0 & 3 & & -1 \end{array}\right) \rightarrow 4^a ecnueva =$ $4^a ec - 3^a ec$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & -3 & & 1 \\ 0 & 7 & 5 & & 0 \\ 0 & 0 & 3 & & -1 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x - 2y - 3z = 1 \\ 7y + 5z = 0 \\ 3z = -1 \end{array}\right.$$

Resolviéndolo, tendremos que $z = \dfrac{-1}{3}$, $y = \dfrac{5}{21}$, $x = \dfrac{10}{21}$

El sistema es compatible determinado y la solución es el conjunto

$$H = \left\{\left(\frac{-1}{3}, \frac{5}{21}, \frac{10}{21}\right)\right\}$$

Ejemplo 2:*Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{l} 4x - 2y - 3z + 2t = 1 \\ 2x + 3y - z - 3t = 2 \\ 3x + y - 4z + t = 1 \\ 3x + y - z = 2 \end{array}\right.$

Como ningún coeficiente de la incógnita "x" vale 1; reorganizamos ecuaciones y sumandos de manera que el pivote sea el coeficiente de la incógnita "y" de la 3ª ecuación

$$\left\{\begin{array}{l} y - 4z + t + 3x = 1 \\ y - z + 3x = 2 \\ -2y - 3z + 2t + 4x = 1 \\ 3y - z - 3t + 2x = 2 \end{array}\right.$$

Consideramos la matriz $\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 0 & 3 & 2 \\ -2 & -3 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -3 & 2 & 2 \end{array}\right)^{4} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec + 2 \cdot 1^a ec \\ 4^a ecnueva = 4^a ec - 3 \cdot 1^a ec \end{array}$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -11 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \end{array}\right)^{5}$$

[4] Observa que en esta matriz las columnas corresponden a los coeficientes de las incógnitas y, z, t y x respectivamente

[5] Intercambiamos las filas segunda y cuarta

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & -11 & 4 & 10 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} 3^a ecnueva = 3^a ec + 2^a ec \\ 4^a ecnueva = 11 \cdot 4^a ec - 3 \cdot 2^a ec \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 21 & 14 \end{array}\right)^{6} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

$$4^a ecnueva = 4^a ec + 2 \cdot 3^a ec \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 6 \end{array}\right)$$

$$\text{dividiendo la } 4^a ec \text{ por } 3 \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 11 & -6 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \end{array}\right)$$

Así pues, el sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{r} y - 4z + t + 3x = 1 \\ 11z - 6t - 7x = -1 \\ t + 3x = 2 \\ 3x = 2 \end{array}\right. \quad \text{Resolviéndolo obtendremos que}$$

$$x = \frac{2}{3}, y = \frac{1}{3}, z = \frac{1}{3}, t = 0$$

Por lo tanto; el sistema es compatible determinado siendo su solución

$$H = \left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0\right)\right\}$$

Ejemplo 3:*Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{r} 3x - 2y + 4z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \\ 5x + z = 0 \end{array}\right.$

Consideramos la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$

Modificamos la 1ª ecuación restándole la segunda

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & 0 \\ 2 & 2 & -3 & 0 \\ 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 5 \cdot 1^a ec \end{array},$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 10 & -17 & 0 \\ 0 & 20 & 34 & 0 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - 2 \cdot 2^a ec \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -4 & 7 & 0 \\ 0 & 10 & -17 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al siguiente sistema

[6] Dividimos la 4ª ecuación por 7 y después la intercambiamos con la 3^a

$$\left.\begin{array}{r} x-4y+7z=0 \\ 10y-17z=0 \end{array}\right\}$$

Este sistema es compatible indeterminado y su solución es el conjunto:

$$H=\left\{\left(-\frac{1}{5}z,\frac{17}{10}z,z\right)\ /\ z\in\mathbb{R}\right\}$$

Este conjunto también se puede expresar así:

$$H=\{(-2\alpha,17\alpha,10\alpha)\ /\ \alpha\in\mathbb{R}\}$$

Ejemplo 4:*Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{r} 3x-2y+4z-t=-1 \\ 2x+2y-3z+2t=2 \\ 5x+z+t=1 \\ x-4y+7z-3t=-3 \end{array}\right.$

Consideramos la matriz $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & -2 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 7 & -3 & -3 \end{array}\right)$

Intercambiamos las filas 1^a y 4^a

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 7 & -3 & -3 \\ 2 & 2 & -3 & 2 & 2 \\ 5 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 4 & -1 & -1 \end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{l} 2^a ecnueva=2^a ec-2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva=3^a ec-5\cdot 1^a ec \\ 4^a ecnueva=4^a ec-3\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 10 & -17 & 8 & 8 \\ 0 & 20 & -34 & 16 & 16 \\ 0 & 10 & -17 & 8 & 8 \end{array}\right)\rightarrow\begin{array}{l} 3^a ecnueva=3^a ec-2\cdot 2^a ec \\ 4^a ecnueva=4^a ec-2^a ec \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -4 & 7 & -3 & -3 \\ 0 & 10 & -17 & 8 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Con lo que el sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x-4y+7z-3t=-3 \\ 10y-17z+8t=8 \end{array}\right.$$

Este sistema es compatible doblemente indeterminado. La solución es el conjunto:

$$H=\left\{\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{5}z-\frac{1}{5}t,\frac{17}{10}z-\frac{4}{5}t+\frac{4}{5},z,t\right)\ /\ z,t\in\mathbb{R}\right\}$$

Dicho conjunto también se puede expresar así:

$$H=\left\{\left(\frac{1}{5}-2\alpha-\beta,17\alpha-4\beta+\frac{4}{5},10\alpha,5\beta\right)\ /\ \alpha,\beta\in\mathbb{R}\right\}$$

Ejemplo 5 *Resuelve el sistema a)* $\left\{\begin{array}{r} 3x-2y+4z=0 \\ 2x+2y-3z=2 \\ 5x+z=3 \end{array}\right.$

Consideramos la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 4 & | & 0 \\ 2 & 2 & -3 & | & 2 \\ 5 & 0 & 1 & | & -3 \end{pmatrix}$

Modificamos la 1ª ecuación restándole la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & | & -2 \\ 2 & 2 & -3 & | & 2 \\ 5 & 0 & 1 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 5 \cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & | & -2 \\ 0 & 10 & -17 & | & 6 \\ 0 & 20 & 34 & | & 13 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - 2 \cdot 2^a ec \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 7 & | & -2 \\ 0 & 10 & -17 & | & 6 \\ 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{pmatrix}$$

El sistema es incompatible

Ejemplo 6 *Resuelve el sistema* $\begin{cases} 3x - 2y = 0 \\ 2x + 2y = 1 \\ 5x - 8y = -2 \end{cases}$

Consideramos la matriz $\begin{pmatrix} 3 & -2 & | & 0 \\ 2 & 2 & | & 1 \\ 5 & 0 & | & -2 \end{pmatrix}$

Modificamos la 1ª ecuación restándole la segunda

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & | & -1 \\ 2 & 2 & | & 1 \\ 5 & 0 & | & -2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 5 \cdot 1^a ec \end{array},$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & | & -1 \\ 0 & 10 & | & 3 \\ 0 & 20 & | & 3 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - 2 \cdot 2^a ec \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & | & -1 \\ 0 & 10 & | & 3 \\ 0 & 0 & | & -3 \end{pmatrix}$$

El sistema es incompatible

Exercise 1.3.1 *Resuelve a)* $\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 3x + y + 2z = 5 \\ 3x + y - z = 4 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} x - 2y - 3z + t = 1 \\ 2x + 3y - z - 2t = 2 \\ 3x + y + 2z + 3t = 1 \\ 3x + y - z = 5 \end{cases}$

Exercise 1.3.2 *Resuelve a)* $\begin{cases} x - 2y - 3z + t = 0 \\ 2x + 3y - z - 2t = 0 \\ 3x + y + 2z + 3t = 0 \\ 3x + y - z = 0 \end{cases}$ *b)* $\begin{cases} 3x - 2y + 4z = 0 \\ 2x + 2y - 3z = 0 \\ 6x + z = 0 \end{cases}$

Es importante resaltar; que los sistemas homogéneos son siempre compatibles, ya que al menos una solución será la trivial (todas las incógnitas nulas)

Ejemplo 7: *Discute el sistema* $\begin{cases} x - 2y - 3z = 1 \\ 2x + 3y - z = 2 \\ 3x + y + a \cdot z = a + 7 \end{cases}$ *según los valores del parámetro a. En los casos en que sea compatible, resuélvelo*

Consideramos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 1 \\ 2 & 3 & -1 & | & 2 \\ 3 & 1 & a & | & a+7 \end{pmatrix}$ $\begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 3 \cdot 1^a ec \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & a+9 & a+4 \end{array}\right) 3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & a+4 & a+4 \end{array}\right)$$

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ 7y+5z=0 \\ (a+4)\cdot z = a+4 \end{array}\right.$$

Según los valores que puede tomar a sólo hay dos posibilidades:

I)Si $a+4 \neq 0 \rightarrow a \neq -4$; podríamos dividir la $3^a ec$ por $a+4$, quedando el sistema así:

$$\left\{\begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ 7y+5z=0 \\ z=1 \end{array}\right. \text{ el sistema sería compatible determinado}$$

$$\text{Resolviéndolo, tendremos } z=1; y=\frac{-5}{7}; x=\frac{18}{7}$$

II) Si $a+4=0 \rightarrow a=-4$ el sistema quedará de la siguiente manera $\left\{\begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ 7y+5z=0 \end{array}\right.$

Obteniendo y en función de z en la $3^a ec \rightarrow y = \dfrac{-5z}{7}$ y sustituyendo en la $1^a ec$

$x-2\left(\dfrac{-5z}{7}\right)-3z=1$ y despejando "x" $\rightarrow x = 1+\dfrac{11z}{7}$

Como el conjunto solución es $H = \left\{\left(1+\dfrac{11z}{7}, \dfrac{-5z}{7}, z\right) / z \in \Re\right\}$ entonces el sistema es compatible indeterminado

Ejemplo 8:*Discute el sistema* $\left\{\begin{array}{l} x-2y-3z=1 \\ 2x+3y+z=2 \\ 3x+y+a\cdot z=b \end{array}\right.$ *según los valores de los parámetros "a" y "b". En los casos en que sea compatible, resuélvelo*

Consideramos la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & a & b \end{array}\right)$ $\begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 3\cdot 1^a ec \end{array}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 7 & a+9 & b-3 \end{array}\right)$$

$$3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 7 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & b-3 \end{array}\right)$$

Podemos dividir la $3^a ec$ por 7 $\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a+2 & b-3 \end{array}\right)$

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left\{\begin{array}{r} x-2y-3z=1 \\ y+z=0 \\ (a+2)\cdot z = b-3 \end{array}\right.$$

Según los valores que pueden tomar a y b hay tres posibilidades:

I)Si $a+2 \neq 0$ y $b \in \Re$; podríamos dividir la $3^a ec$ por $a+2$, quedando el sistema así:

$$\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ y+z=0 \\ z=\dfrac{b-3}{a+2} \end{cases}$$

Resolviéndolo, tendremos

$$z=\frac{b-3}{a+2}; y=-\frac{b-3}{a+2}; x=1+\frac{b-3}{a+2}=\frac{a+b-1}{a+2}$$

Po lo tanto; el sistema es compatible determinado

II) Si $a+2=0$ y $b-3=0 \rightarrow (a=-2$ y $b=3)$ el sistema quedará de la siguiente manera

$$\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ y+z=0 \end{cases}$$

Obteniendo y en función de z en la $3^a ec \rightarrow y=-z$ y sustituyendo en la $1^a ec$ $x-2(-z)-3z=1$ y despejando "x" $\rightarrow x=1+z$

Como el conjunto solución es $H=\{(1+z,-z,z)/z \in \Re\}$ entonces el sistema es compatible indeterminado

III) Si $a+2=0$ y $b-3 \neq 0 \rightarrow (a=-2$ y $b \neq 3)$el sistema quedará de la siguiente manera:

$$\begin{cases} x-2y-3z=1 \\ y+z=0 \\ 0 \cdot z=b-3 \neq 0 \end{cases} \rightarrow Absurdo$$

El sistema no tiene solución; es Incompatible

Ejemplo 9 Discutir según los valores de a el sistema $\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ 2x+3y+(a+1)z=0 \\ 3x+y+a \cdot z=0 \end{cases}$.

Consideramos la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 0 \\ 2 & 3 & a+1 & | & 0 \\ 3 & 1 & a & | & 0 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 2^a ecnueva = 2^a ec -2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec -3 \cdot 1^a ec \end{matrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 7 & a+7 & | & 0 \\ 0 & 7 & a+9 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$$3^a ecnueva = 3^a ec -2^a ec \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 & | & 0 \\ 0 & 7 & a+7 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & | & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema $\begin{cases} x-2y-3z=0 \\ 7y+(a+7)z=0 \\ 2z=0 \end{cases}$

Este sistema es compatible determinado y su solución es la trivial$\rightarrow x=0$, $y=0$, $z=0$

Ejemplo 9 Discutir según los valores de a el sistema $\begin{cases} (a-2)x-y+z=0 \\ x+(2a-1)y-az=0 \\ 1x+ay-1z=0 \end{cases}$.

Consideramos la matriz $\left(\begin{array}{ccc|c} a-2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2a-1 & -a & 0 \\ 1 & a & -1 & 0 \end{array}\right)$

Intercambiamos las filas 1^a y 3^a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 0 \\ 1 & 2a-1 & -a & 0 \\ a-2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - (a-2)\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & -a+1 & 0 \\ 0 & -a^2+1 & -a+1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & -(a-1) & 0 \\ 0 & -(a-1)(a+1) & -(a-1) & 0 \end{array}\right)$$

Modificamos la 3ª ecuación de la siguiente manera
$3^a ecnueva = 3^a ec + (a+1)\cdot 2^a ec$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & -(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(a-1)-(a-1)(a+1) & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & a & -1 & 0 \\ 0 & a-1 & -(a-1) & 0 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & 0 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al sistema $\left\{\begin{array}{l} x+ay-z=0 \\ (a-1)y-(a-1)z=0 \\ -(a+2)(a-1)z=0 \end{array}\right.$

Posibilidades:

1. Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ →El sistema es compatible determinado la solución es la trivial $x=y=z=0$

2. Si $a=1$ El sistema inicial es equivalente al sistema$\{x+y-z=0$
   Este sistema es compatible doblemente indeterminado,
   Su solución es el conjunto:

$$H = \{(-y+z, y, z) \ / \ y, z \in \mathbb{R}\}$$

3. Si $a=-2$.El sistema inicial es equivalente al sistema $\left\{\begin{array}{l} x-2y-z=0 \\ -3y+3z=0 \end{array}\right.$

   Este sistema es compatible indeterminado.
   Su solución es el conjunto:

$$H = \{(3z, z, z) \ / \ z \in \mathbb{R}\}$$

Ejemplo 10 Discutir según los valores del parámetro k el siguiente sistema $\left.\begin{array}{l} (3k-1)x+2ky+(3k+1)z=1 \\ 2kx+2ky+(3k+1)z=k \\ (k+1)x+(k+1)y+2(k+1)z=k^2 \end{array}\right\}$ y en los casos en que sea compatible resolvedlo

Previamente realizamos un intercambio de ecuaciones y de sumandos

$$\left.\begin{array}{l} 2ky + 2kx + (3k+1)z = k \\ 2ky + (3k-1)\,x + (3k+1)z = 1 \\ (k+1)y + (k+1)x + 2(k+1)z = k^2 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 2k & 2k & 3k+1 & k \\ 2k & 3k-1 & 3k+1 & 1 \\ k+1 & k+1 & 2k+2 & k^2 \end{array}\right) \qquad (**)$$

I) Si $k \neq 0$

$$\left.\begin{array}{l} E_2' = E_2 - E_1 \\ E_3' = 2kE_3 - (k+1)E_1 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2k & 2k & 3k+1 & k \\ 0 & k-1 & 0 & -k+1 \\ 0 & 0 & k^2-1 & 2k^3-k^2-k \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2ky + 2kx + (3k+1)z = k \\ (k-1)\,x = -k+1 \\ (k^2-1)z = 2k^3 - k^2 - k \end{array}\right\}$$

Nos interesa factorizar el coeficiente asociado a la incógnita z y el término independiente de la última ecuación

$$\left.\begin{array}{r} 2ky + 2kx + (3k+1)z = k \\ (k-1)\,x = -k+1 \\ (k-1)(k+1)z = (2k^2+k)(k-1) \end{array}\right\}$$

Ia)
- Si además $k \neq 1$ y $k \neq -1 \rightarrow$ el sistema es compatible determinado; ya que todos los elementos de la diagonal principal son no nulos

Despejando de la última ecuación la incógnita z tendremos

$$z = \frac{(2k^2+k)(k-1)}{(k-1)(k+1)} = \frac{2k^2+k}{k+1}$$

De la segunda ecuación obtenemos:

$$x = \frac{-k+1}{k-1} = -1$$

Por último, sustituyendo los valores obtenidos para las incógnitas z y x en la primera ecuación; tendremos que:

$$2ky = k + 2k - \frac{\left(2k^2+k\right)(3k+1)}{k+1} = \frac{(-2k)\left(k-1+3k^2\right)}{k+1}$$

Despejando y

$$y = \frac{(-2k)\left(k-1+3k^2\right)}{(k+1)\,2k} = \frac{-3k^2-k+1}{k+1}$$

$$S = \left\{ \left(-1, \frac{-3k^2 - k + 1}{k+1}, \frac{2k^2 + k}{k+1} \right) / k \neq 1 \ y \ k \neq -1 \right\}$$

Ib) • Si $k = 1 \rightarrow 2x + 2y + 4z = 1\}$, Sistema compatible doblemente indeterminado

$$S = \left\{ \left(-y - 2z + \frac{1}{2}, y, z \right) / y, z \in R \right\}$$

Ic) Si k$= -1 \rightarrow$ $\left.\begin{array}{l} -2x - 2y - 2z = k \\ -2x = -2 \\ 0 = -2 \end{array}\right\}$ Sistema incompatible

II) Si $k = 0 \rightarrow$sustituyendo en la matriz $(**)$ tendremos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{l} z = 0 \\ -x + z = 1 \\ y + x + 2z = 0 \end{array}\right\} \text{cuya solución es } S = \{(-1, 1, 0)\}$$

Ejemplo 11 Resuelve el sistema $\left\{\begin{array}{l} x + y + az = 2 \\ x + ay + z = -1 \\ ax + y + z = -1 \end{array}\right.$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} E_2 - 2 \cdot E_1 \\ E_3 - a \cdot E_1 \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & -3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -1-2a \end{array}\right)$$

$$E_3 - E_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & -3 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -4-2a \end{array}\right)$$

Con lo que el sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left\{\begin{array}{l} x + y + az = 2 \\ (a-1)\, y + (1-a)\, z = -3 \\ (-a^2 - a + 2)z = -4 - 2a \end{array}\right.$$

Es muy importante; descomponer factorialmente el polinomio de segundo grado, que aparece como coeficiente de la incógnita z, de la última ecuación

Observa que:

$$-a^2 - a + 2 = -(a-1)(a+2)$$

Con lo que el sistema quedaría así:

$$\left\{\begin{array}{c} x + y + az = 2 \\ (a-1)\, y + (1-a)\, z = -3 \\ -(a-1)(a+2)z = -2(2+a) \end{array}\right. \qquad \text{(Sistema final)}$$

Casos que se pueden presentar

I) Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ el sistema será compatible determinado; ya que de la 3ª ecuación obtendremos

$$z = \frac{-2(2+a)}{-(a-1)(a+2)} = \frac{2}{a-1}$$

Sustituyendo este valor en la $2^a ec$

$$(a-1)\,y + \frac{2\,(1-a)}{a-1} = -3 \rightarrow (a-1)\,y - 2 = -3$$

Y despejando la incógnita y (podemos ya que $a-1 \neq 0$)

$$y = \frac{-1}{a-1}$$

Sustituyendo ahora en la $1^a ec$ los valores obtenidos para las incógnitas x e y

$$x - \frac{1}{a-1} + \frac{2a}{a-1} = 2 \rightarrow x + \frac{2a-1}{a-1} = 2$$

Y despejando x

$$x = 2 - \frac{2a-1}{a-1} = \frac{-1}{a-1}$$

La solución de este sistema es $S = \left\{ \left(\frac{-1}{a-1}, \frac{-1}{a-1}, \frac{2}{a-1} \right) \text{ siendo } a \neq 1 \ y \ a \neq -2 \right\}$

II) Si $a = 1$ al sustituir en el sistema final, obtenemos un absurdo

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y + 1 \cdot z = 2 \\ 0 \cdot y + 0 \cdot z = -3 \\ 0 \cdot z = 6 \end{array} \right.$$

Por lo tanto; el sistema es incompatible

III) Si $a = -2$ al sustituir en el sistema final, veremos que la $3^a ec$ desaparece

$$\left\{ \begin{array}{c} x + y - 2z = 2 \\ -3y + 3z = -3 \\ 0 \cdot z = 0 \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} x + y - 2z = 2 \\ -y + z = -1 \end{array} \right.$$

El sistema es compatible indeterminado y las soluciones son las del conjunto

$$S = \{(z+1, z+1, z)\,/z \in \Re\}$$

1.4 Cuestiones

Exercise 1.4.1 *Escribe un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que sea: a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado y c) Incompatible.*

Exercise 1.4.2 *Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con dos incógnitas que sea: a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado y c) Incompatible.*

Exercise 1.4.3 *¿Un sistema que tenga dos ecuaciones lineales con tres incógnitas puede ser compatible determinado?*

Exercise 1.4.4 *Escribe un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea: a) Compatible determinado b) Compatible indeterminado y c) Incompatible.*

Exercise 1.4.5 *Escribe dos sistemas de ecuaciones lineales que sean equivalentes*

Exercise 1.4.6 *¿Los siguientes sistemas* $\left\{\begin{array}{c} x+y=3 \\ 2x-y=0 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{c} x+y=3 \\ -x+2y=-3 \end{array}\right.$ *son equivalentes?*

Exercise 1.4.7 *¿Los siguientes sistemas* $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ 2x-y+z=3 \\ 3x+2z=9 \end{array}\right. \left\{\begin{array}{c} x+y+z=6 \\ 3x+2z=9 \\ 4x+y+3z=15 \end{array}\right.$ *son equivalentes?*

Exercise 1.4.8 *Invéntate un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya solución sea* $H=\{(-1,2,-3)\}$

Exercise 1.4.9 *a) Invéntate un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas cuya solución sea* $H=\{(x,2x-3,3x+2)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$
b)Invéntate un sistema de tres ecuaciones lineales con tres incógnitas equivalente al sistema del apartado anterior que tenga una ecuación más

Exercise 1.4.10 *¿ Todo sistema de dos ecuaciones lineales con tres incógnitas es siempre compatible indeterminado?. Razona tu respuesta.*

Exercise 1.4.11 *¿ Todo sistema de ecuaciones lineales con mayor número de ecuaciones que incógnitas es siempre compatible ?. Razona tu respuesta.*

Exercise 1.4.12 *Si las soluciones de dos sistemas de ecuaciones lineales son respectivamente los conjuntos*
$H=\left\{\left(\frac{2-z}{5},\frac{-1+3z}{5},z\right)\ /\ z\in\mathbb{R}\right\}$ $\qquad H'=\{(x,1-3x,2-5x)\ /\ x\in\mathbb{R}\}$
Determina si dichos sistemas son equivlentes.

1.5 Problemas de planteamiento y aplicación

Exercise 1.5.1 *Dada la parábola $y = ax^2 + bx + c$ Determinad los parámetros a, b y c para que los puntos $P(-2,1), Q(3,3)$ y $R(1,3)$ pertenezcan a su gráfica*

Como los puntos anteriores son de la parábola; entonces sus coordenadas han de verificar su ecuación $y = ax^2 + bx + c$. De donde

$$\left.\begin{array}{l} P(-2,1) \\ Q(3,3) \\ R(1,3) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 1 = 4a - 2b + c \\ 3 = 9a + 3b + c \\ 3 = a + b + c \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema anterior obtendremos:

$$a = -\tfrac{2}{15}\ ,b = \tfrac{8}{15}\ ,c = \tfrac{13}{5}$$

La única parábola que pasa por los puntos P, Q y R es:

$$y = -\frac{2}{15}x^2 + \frac{8}{15}x + \frac{13}{5}$$

Exercise 1.5.2 *Dada la función $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ Determinad los parámetros a, b y c para que los puntos $P(0,0), Q(2,6)$ y $R(-2,-6)$ pertenezcan a su gráfica*

Como los puntos anteriores son de la función dada; entonces sus coordenadas han de verificar su ecuación $y = x^3 + ax^2 + bx + c$. De donde

$$\left.\begin{array}{l} P(0,0) \\ Q(2,6) \\ R(-2,-6) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 0 = c \\ 6 = 8 + 4a + 2b + c \\ -6 = -8 + 4a - 2b + c \end{array}\right\}$$

Reorganizando el sistema anterior tendremos

$$\left.\begin{array}{l} 0 = c \\ 4a + 2b = -2 \\ +4a - 2b = 2 \end{array}\right\}$$

Si resolvemos el sistema, obtendremos$\rightarrow a = 0$ y $b = -1$

La función pedida es:

$$y = x^3 - x$$

Exercise 1.5.3 *¿Existe alguna parábola ($y = ax^2 + bx + c$)que pase por los puntos $P(1,2), Q(2,3), R(-1,6)$ y $T(3,2)$?*

Como los puntos dados son de la parábola; entonces sus coordenadas han de verificar su ecuación $y = ax^2 + bx + c$. De donde

$$\left.\begin{array}{l} P(1,2) \\ Q(2,3) \\ R(-1,6) \\ T(3,2) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 2 = a + b + c \\ 3 = 4a + 2b + c \\ 6 = a - b + c \\ 2 = 9a + 3b + c \end{array}\right\}$$

Si resolvemos ahora el sistema , obtendremos que el sistema anterior es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{c} a+b+c=2 \\ -2b-3c=-5 \\ 3c=9 \\ 0=-4 \end{array}\right\}$$

Como este sistema es incompatible;: entonces no existe ninguna parábola que pase por los puntos P, Q, R, T

Exercise 1.5.4 *¿Existe alguna parábola ($y = ax^2 + bx + c$)que pase por los puntos $P(1,2), Q(2,3)$?*

Como los puntos P, Q son de la parábola; entonces sus coordenadas han de verificar su ecuación $y = ax^2 + bx + c$. De donde

$$\left.\begin{array}{c} P(1,2) \\ Q(2,3) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} 2 = a+b+c \\ 3 = 4a+2b+c \end{array}\right\}$$

Aplicando el método de Gaus, el sistema anterior es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{c} a+b+c=2 \\ -2b-3c=-5 \end{array}\right\}$$

Este sistema es compatible indeterminado y todas sus soluciones (expresadas en función del parámetro c son:

$$a = \tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}\ , b = -\tfrac{3}{2}c + \tfrac{5}{2}$$

Existen infinitas parábolas que pasan por los puntos P y Q. En concreto, todas ellas son de la forma:

$$y = \left(\tfrac{1}{2}c - \tfrac{1}{2}\right)x^2 + \left(-\tfrac{3}{2}c + \tfrac{5}{2}\right)x + c \qquad \text{con } c \in \Re \sim \left\{\tfrac{1}{2}\right\}$$

Fíjate que si $c = \frac{1}{2}$; obtendríamos la recta $y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{2}$.

Exercise 1.5.5 *Dada la función $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$ (hipérbola equilatera) determina los parámetros a, b, c y d para que los puntos $P(3,10), Q(0,-2), R(1,-6)$ y $T(4,6)$ pertenezcan a su gráfica*

$$\left.\begin{array}{c} P(3,10) \\ Q(0,-2) \\ R(1,-6) \\ T(4,6) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} 10 = \dfrac{3a+b}{3c+d} \\ -2 = \dfrac{b}{d} \\ -6 = \dfrac{a+b}{c+d} \\ 6 = \dfrac{4a+b}{4c+d} \end{array}\right\}$$

Reorganizando todas las ecuaciones y resolviendo el sistema homogéneo

$$\left.\begin{array}{l} 0 = 3a+b-30c-10d \\ 0 = b+2d \\ 0 = a+b+6c+6d \\ 0 = 4a+b-24c-6d \end{array}\right\}$$

Obtenemos que el sistema es compatible indeterminado y todas las soluciones (en función del parámetro c)son de la forma

$$d = -2c, a = 2c, b = 4c \qquad \text{con } c \in \Re$$

Casos

1. Si $c = 0$ no existe función (Razona cuál es el motivo)
2. Si $c \neq 0 \rightarrow y = \dfrac{2cx + 4c}{cx - 2c} = \dfrac{c\,(2x + 4)}{c\,(x - 2)} \rightarrow y = \dfrac{2x + 4}{x - 2}$

La única hipérbola equilátera que pasa por los puntos dados; es pues:

$$y = \frac{2x + 4}{x - 2}$$

Exercise 1.5.6 *Determina los valores a, b, c para que la parábola $y = ax^2 + bx + c$ pase por los puntos $P(1, 4), Q(2, 9), T(3, 24)$*

Como los puntos anteriores son de la parábola; entonces sus coordenadas han de verificar su ecuación $y = ax^2 + bx + c$. De donde

$$\left.\begin{array}{c} P(1,4) \\ Q(2,9) \\ R(3,24) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} 4 = a + b + c \\ 9 = 4a + 2b + c \\ 24 = 9a + 3b + c \end{array}\right\}$$

Restando la 2^a de la 1^a y la 3^a de la 2ª tendremos

$$\left.\begin{array}{c} 4 = a + b + c \\ 5 = 3a + b \\ 15 = 5a + b \end{array}\right\}$$

Restando la 3^a de la 2^a

$$\left.\begin{array}{c} 4 = a + b + c \\ 5 = 3a + b \\ 10 = 2a \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema obtenemos que:

$$a = 5, b = -10, c = 9$$

Así pues, la parábola pedida es

$$y = 5x^2 - 10x + 9$$

Exercise 1.5.7 *Un número de tres dígitos es igual a 28 veces la suma de sus dígitos. Si al número obtenido escribiendo sus dígitos en orden inverso le restamos ell número inicial , resulta 198. El dígito de las unidades es igual a la suma de los otros dos. Determina dicho número*

Si el número es $N = xyz \rightarrow N = 100x + 10y + z$
Si invertimos sus cifras:

$$zyx \rightarrow 100z + 10y + x$$

$$\left.\begin{array}{l} 100x+10y+z=28(x+y+z) \\ 100z+10y+x-(100x+10y+z)=198 \\ z=x+y \end{array}\right\}$$

Reorganizando y simplificando las ecuaciones, tendremos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x-z=-2 \\ 72x-18y-27z=0 \end{array}\right\}$$

Cuya solución es $x=2,\ y=2, z=4$
El número pedido es el 224

Exercise 1.5.8 *Una compañía petrolífera posee tres refinerías I,II,III que producen las siguientes cantidades (en litros) de fuel, gasóleo y gasolina por cada barril de crudo*

	I	II	III
Fuel	50	30	75
Gasóleo	30	65	40
Gasolina	70	55	30

.

Si la demanda de fuel, gasóleo y gasolina es de $10775000, 8675000$ *y* 10175000 *litros respectivamente. ¿ Cuántos barriles de crudo necesitará cada refinería para satisfacer la demanda?*

Si llamamos x al número de barriles de la refinería I, y al número de barriles de la refinería II y z al número de barriles de la refinería III. Entonces:

$$\left.\begin{array}{l} 50x+30y+75z=10775000 \\ 30x+65y+40z=8675000 \\ 70x+55y+30z=10175000 \end{array}\right\}$$

Dividiendo las tres ecuaciones por 5 tenemos :

$$\left.\begin{array}{l} 10x+6y+15z=2155000 \\ 6x+13y+8z=1735000 \\ 14x+11y+6z=2035000 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 13 & 8 & 1735000 \\ 10 & 6 & 15 & 2155000 \\ 14 & 11 & 6 & 2035000 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime}=6\cdot 2^a-10\cdot 1^a \\ 3^{a\prime}=6\cdot 3^a-14\cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 13 & 8 & 1735000 \\ 0 & -94 & 10 & -4420000 \\ 0 & -116 & -76 & -12080000 \end{array}\right)$$

Dividimos la 2^a por 2 y la 3^a por -2 también

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 13 & 8 & 1735000 \\ 0 & -47 & 5 & -2210000 \\ 0 & 58 & 38 & 6040000 \end{array}\right) 3^{a\prime}=47\cdot 3^a+58\cdot 2^a \left(\begin{array}{ccc|c} 6 & 13 & 8 & 1735000 \\ 0 & -47 & 5 & -2210000 \\ 0 & 0 & 2076 & 155700000 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{l} 6x+13y+8z=1735000 \\ -47y+5z=-2210000 \\ 2076z=155700000 \end{array}\right\}$$

De la última ecuación $z=\dfrac{155700000}{2076}=75000$
Sustituyendo en la 2ª ecuación:
$-47y+375000=-2210000 \rightarrow y=55000$
Sustituyendo los valores de ambas incógnitas en la 1^a

$6x + 13 \cdot 55000 + 8 \cdot 75000 = 1735000 : :$
$6x + 715000 + 600000 = 1735000 \rightarrow x = 70000$
La solución es: $x = 70000$,$y = 55000$, $z = 75000$

Exercise 1.5.9 *La edad de un padre es doble que la suma de las edades de sus dos hijos, mientras que hace unos años (exactamente la diferencia de las edades actuales de sus hijos) la edad del padre era triple que la suma de las edades en aquel tiempo de sus hijos. Cuando pasen tantos años como la suma de las edades actuales de los hijos, la suma de las edades de las tres personas será de 150 años. ¿ Qué edad tenía el padre en el momento de nacer sus hijos?*

$x \rightarrow$ *Edad actual del padre*
$y \rightarrow$ *Edad actual del hijo mayor*
$z \rightarrow$ *Edad actual del hijo menor*
$y - z \rightarrow$ *Diferencia de las edades de sus hijos*
$y + z \rightarrow$ *Suma de las edades de sus hijos*
Si volvemos hacia atrás $y - z$ años; entonces sus edades son

Padre	Hijo 1°	Hijo 2°
$x - (y - z)$	$y - (y - z)$	$z - (y - z)$

Si pasan $y + z$ años;entonces sus edades son

Padre	Hijo 1°	Hijo 2°
$x + (y + z)$	$y + (y + z)$	$z + (y + z)$

Con esta información ya podemos plantear las ecuaciones del sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x = 2(y + z) \\ x - (y - z) = 3\,(y - (y - z) + z - (y - z)) \\ x + (y + z) + y + (y + z) + z + (y + z) = 150 \end{array}\right\}$$

Reorganizando las ecuaciones obtenemos el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y - 2z = 0 \\ x + 2y - 8z = 0 \\ x + 4y + 4z = 150 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & | & 0 \\ 1 & 2 & -8 & | & 0 \\ 1 & 4 & 4 & | & 15 \end{pmatrix} \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a - 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 4 & -6 & | & 0 \\ 0 & 6 & 6 & | & 150 \end{pmatrix}$$

Dividimos la 3^a por 6, la segunda por 2,y después las intercambiamos

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 25 \\ 0 & 2 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} 3^{a\prime} = 3^a - 2 \cdot 2^a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & | & 25 \\ 0 & 0 & -5 & | & -50 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{l} x - 2y - 2z = 0 \\ y + z = 25 \\ -5z = -50 \end{array}\right\} \text{cuya solución es } x = 50, y = 15, z = 10$$

Así pues; cuando nació su segundo hijo tenía 40 años, y cuando nació el primero 35 años

Exercise 1.5.10 *Halla tres números reales sabiendo que el primero es igual a dos veces el segundo más la mitad del tercero, que la suma del segundo y el tercero es igual al primero más 1, y que si se resta el segundo de la suma del primero con el tercero el resultado es 5*

$$\left.\begin{array}{l} x = 2y + \dfrac{z}{2} \\ y + z = x + 1 \\ x + z - y = 5 \end{array}\right\}$$

Reorganizando el sistema , tendremos:

$$\left.\begin{array}{l} 2x - 4y - z = 0 \\ -x + y + z = 1 \\ x - y + z = 5 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 5 \\ 2 & -4 & -1 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a + 2 \cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Intercambiando la 2^a y la 3^a $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \end{array}\right)$

El sistema es equivalente a :

$$\left.\begin{array}{l} -x + y + z = 1 \\ -2y + z = 2 \\ 2z = 6 \end{array}\right\}$$

De la $3^a \rightarrow z = 3$

Sustituyendo en la $2^a \rightarrow -2y + 3 = 2$ y resolviéndola :

$$y = \tfrac{1}{2}$$

Sustituyendo los dos valores anteriores en la $1^a \rightarrow -x + \frac{1}{2} + 3 = 1$ y resolviéndola:

$$x = \tfrac{5}{2}$$

Solución $x = \frac{5}{2}, y = \frac{1}{2}, z = 3$

Exercise 1.5.11 *Una fábrica de electrodomésticos tiene una producción semanal fija de 42 unidades. La fábrica abastece a 3 establecimientos que demandan toda la producción. En una determinada semana el primer establecimiento solicitó tantas unidades como el segundo y tercero juntos, mientras que el segundo establecimiento pidió un 20% más que la suma de la mitad de lo pedido por el primero más la tercera parte de lo pedido por el tercero. ¿Cuáles fueron las cantidades solicitadas por los tres establecimientos?*

Si x, y, z son las unidades del primer segundo y tercer establecimiento respectivamente; entonces:

$$\left.\begin{array}{c} x + y + z = 42 \\ x = y + z \\ y = \dfrac{120}{100}\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{z}{3}\right) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} x + y + z = 42 \\ x - y - z = 0 \\ -3x + 5y - 2z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 42 \\ -3 & 5 & -2 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a + 3 \cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 42 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right)$$

$$2^{a\prime} = \frac{2^a}{2} - 1^a \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 2 & -5 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$3^{a\prime} = 3^a - 2{\cdot}2^a \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 21 \\ 0 & 0 & -7 & -42 \end{array}\right)$$

El sistema es equivalente a :

$$\left.\begin{array}{c} x - y - z = 0 \\ y + z = 21 \\ -7z = -42 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema; obtendremos como solución $x = 21, y = 15, z = 6$

Exercise 1.5.12 *Un financiero invirtió en bolsa* 3000000 *pts en acciones de tres empresas* A, B, C*, y obtuvo un beneficio de* 155000 *pts. Si sabemos que invirtió en* A *tanto como en* B *y* C *juntos y que los beneficios de las empresas fueron de un* 5% *en* A*,* 3% *en* B *y un* 10% *en* C*. ¿Cuánto invirtió en cada empresa*

Si x, y, z son las cantitades invetidas en A, B y C respectivamente; entonces:

$$\left.\begin{array}{c} x + y + z = 3000000 \\ x = y + z \\ \dfrac{5x}{100} + \dfrac{3y}{100} + \dfrac{10z}{100} = 155000 \end{array}\right\}$$

De la 1^a y la 2ª deducimos que $2x = 3000000 \rightarrow x = 1500000$

Sustituyendo el valor de x en las otras dos ecuaciones tendremos el sistema:

$$\left.\begin{array}{c} 1500000 = y + z \\ 75000 + \dfrac{3y}{100} + \dfrac{10z}{100} = 155000 \end{array}\right\} \equiv \left.\begin{array}{c} y + z = 1500000 \\ 3y + 10z = 8000000 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1500000 \\ 3 & 10 & 8000000 \end{array}\right) 2^{a\prime} = 2^a - 3 \cdot 1^a \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 1500000 \\ 0 & 7 & 3500000 \end{array}\right)$$

El sistema es equivalente a :

$$\left.\begin{array}{c} y + z = 1500000 \\ 7z = 3500000 \end{array}\right\}$$

Resolviendo el sistema, la solución será $x = 1500000, y = 1000000, z = 500000$

Exercise 1.5.13 *Si la altura de Carlos aumentase el triple de la diferencia de las alturas de Toni y Juan, Carlos sería igual de alto que Juan. La altura de los tres suman 515 cm. ,y ocho veces la altura de Toni es igual que nueve veces la de Carlos. Halla las tres alturas*

Si x, y, z son las alturas de Carlos, Toni y Juan respectivamente

$$\left.\begin{array}{c} x + 3(y - z) = z \\ x + y + z = 515 \\ 8y = 9x \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} x + 3y - 4z = 0 \\ x + y + z = 515 \\ -9x + 8y = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 515 \\ -9 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right) \left.\begin{array}{c} 2^{a\prime} = 2^a - 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a + 9 \cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 515 \\ 0 & 35 & -36 & 0 \end{array}\right)$$

$$3^{a\prime} = 2 \cdot 3^a + 35 \cdot 2^a$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 5 & 515 \\ 0 & 0 & 103 & 515 \cdot 35 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{c} x + 3y - 4z = 0 \\ -2y + 5z = 515 \\ 103z = 515 \cdot 35 \end{array}\right\}$$

De la última ecuación obtenemos $z = \dfrac{515 \cdot 35}{103} = 5 \cdot 35 = 175$

Sustituyendo en la segunda $-2y + 5 \cdot 175 = 515$, y despejando y tendremos:

$$y = 180$$

Sustituyendo los valores de y y z en la 1^a $x + 540 - 700 = 0$y despejando x:

$$x = 160$$

La solución es : $x = 160, z = 175, y = 180$

Exercise 1.5.14 *La edad de su madre es, en la actualidad, el triple que la de su hijo. La suma de las edades de padre,madre e hijo es de 80 años, y dentro de 5 años la suma de las edades de la madre y del hijo será 5 años más que la del padre*

Si x, y, z son respectivamente las edades de padre,madre e hijo respectivamente

Si transcurren 5 años; entonces las edades respectivas son $x + 5, y + 5, z + 5$

$$\left.\begin{array}{c} x + y + z = 80 \\ y = 3z \\ y + 5 + z + 5 = x + 5 + 5 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} x + y + z = 80 \\ y - 3z = 0 \\ -x + y + z = 0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) 3^{a\prime} = 3^a + 1^a \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 80 \end{array}\right)$$

Dividimos la última por 2

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 40 \end{array}\right) 3^{a\prime} = 3^a - 2^a \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 80 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 40 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{c} x + y + z = 80 \\ y - 3z = 0 \\ 4z = 40 \end{array}\right\}$$

Resolviéndolo, obtendremos $x = 40, y = 30,\ z = 10$

Exercise 1.5.15 *Un automóvil sube las cuestas a una velocidad de 54 Km/h.Las baja a 90 km/h y en llano circula a 80 km/h . Para ir de A a B tarda 2horas y 30 minutos, y para volver de B a A, 2 horas y 38 minutos. ¿ Cuál es la longitud del camino llano entre A y B si se sabe que A y B distan 192 Km*

Es evidente que el camino tiene tres tipos de tramo. Si vamos de A a B y llamo x a los kilómetros de subida, y a los km de llano y z a los de bajada; entonces es evidente que de B a A x serán los km de bajada, y los de llano y z los de subida (Fíjate que $x+y+z=192$)

Tramo de A a B (tiempo total$\rightarrow 2.5$)

	Subida	LLano	Bajada
Km	x	y	z
Velocidad	54	80	90
Tiempo en horas	$\frac{x}{54}$	$\frac{y}{80}$	$\frac{z}{90}$

$$\rightarrow \frac{x}{54}+\frac{y}{80}+\frac{z}{90}=2.5$$

Tramo de B a A (tiempo total$\rightarrow 2+\frac{38}{60}$)

	Subida	LLano	Bajada
Km	z	y	x
Velocidad	54	80	90
Tiempo en horas	$\frac{z}{54}$	$\frac{y}{80}$	$\frac{x}{90}$

$$\rightarrow \frac{x}{90}+\frac{y}{80}+\frac{z}{54}=2+\frac{38}{60}$$

Hemos de resolver pues el sistema

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=192 \\ \frac{x}{54}+\frac{y}{80}+\frac{z}{90}=2.5 \\ \frac{x}{90}+\frac{y}{80}+\frac{z}{54}=2+\frac{38}{60} \end{array}\right\}$$

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=192 \\ 40x+27y+24z=5400 \\ 24x+27y+40z=5688 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 40 & 27 & 24 & 5400 \\ 24 & 27 & 40 & 5688 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{a\prime}=2^a-40\cdot 1^a \\ 3^{a\prime}=3^a-24\cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 0 & -13 & -16 & -2280 \\ 0 & 3 & 16 & 1080 \end{array}\right)$$

Intercambiamos las columnas 2^a y 3^a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 0 & -16 & -13 & -2280 \\ 0 & 16 & 3 & 1080 \end{array}\right) 3^{a\prime}=3^a+2^a \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 192 \\ 0 & -16 & -13 & -2280 \\ 0 & 0 & -10 & -1200 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+z+y=192 \\ -16z-13y=-2280 \\ -10y=-1200 \end{array}\right\} \rightarrow y=120$$

Sustituyendo en la 2^a $-16z-1560=-2280 \rightarrow -16z=-720$

Despejando $z \rightarrow z=45$

Sustituyendo los valores de y y z en la1^a

$x+45+120=192 \rightarrow x=27$

Exercise 1.5.16 *El Sr Carlos le dice a José: "Yo tengo el doble de la edad que usted tenía cuando yo tenía la edad que usted tiene ahora. La suma del triple de la edad que usted tiene y la edad que yo tendré cuando usted tenga mi edad es de 280"; ¿Qué edades tienen actualmente ambos?*

$X \rightarrow$ *Edad de Carlos*

$Y \rightarrow$ *Edad de José*

Para que Carlos tuviese la edad de José, tendríamos que retroceder $X-Y$ años; con lo que sus edades respectivas serían:

$X-(X-Y) \rightarrow$ *Edad de Carlos hace* $X-Y$ *años*

$Y-(X-Y)=2Y-X \rightarrow$ *Edad de José hace* $X-Y$ *años*

Para que José tuviese la edad de Carlos tendríamos que avanzar en el tiempo $X-Y$ años; con lo que sus edades respectivas serían:

$X+(X-Y)=2X-Y \rightarrow$ *Edad de Carlos dentro de* $X-Y$ *años*

$Y+(X-Y) \rightarrow$ *Edad de José dentro de* $X-Y$ *años*

Leyendo detenidamente el enunciado del problema; podemos concluir que:

$$\left.\begin{array}{l} X=2(2Y-X) \\ 3Y+(2X-Y)=280 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{l} 3X-4Y=0 \\ 2X+2Y=280 \end{array}\right\} \equiv \left.\begin{array}{l} 2Y+2X=280 \\ -4Y+3X=0 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 280 \\ -4 & 3 & 0 \end{array}\right) 2^{a'}=2^{a}+2\cdot 1^{a} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 280 \\ 0 & 7 & 560 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{l} 2Y+2X=280 \\ 7X=560 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Su solución es } X=80,\ Y=60$$

1.6 Actividades de evaluación

El objetivo de esta sección es preparar al alumno para poder superar sin dificultades el control de este tema. Es evidente; que el alumno es el que ha de intentar resolver todas los ejercicios (De aquí seleccionaré las preguntas del examen).

Para empezar dividiré esta sección en cuatro boques. A saber:

1° Ejercicios recomendados

2° Ejercicios de Selectividad-Logse de otras comunidades

3° Ejercicicios de Selectividad de la Comunidad Valenciana

4° Exámenes personales

1.6.1 Ejercicios recomendados

Exercise 1.6.1 *Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas*

$$a)\ \left.\begin{array}{l} x+y+z=11 \\ 2x-y+z=5 \\ 3x+2y+z=24 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{l} x+y+z=2 \\ 2x+3y+5z=11 \\ x-5y+6z=29 \end{array}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{l} x+y=12 \\ y+z=8 \\ x+z=6 \end{array}\right\} \qquad d)\ \left.\begin{array}{l} 2x+y-z=15 \\ 5x-y+5z=16 \\ x+4y+z=20 \end{array}\right\}$$

Soluciones

$$a)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 2 & -1 & 1 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 24 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 2^{a\prime}=2^a-2\cdot 1^a \\ 3^{a\prime}=3^a-3\cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & -3 & -1 & -17 \\ 0 & -1 & -2 & -9 \end{array}\right)$$

Cambiamos de signo la 2^a y después intercambiamos la 2^a y la 3^a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -3 & -1 & -17 \end{array}\right) 3^{a\prime}=3^a+3\cdot 2^a\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 11 \\ 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 0 & 5 & 10 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=11 \\ y+2z=9 \\ 5z=10 \end{array}\right\}$$

De la 3ª ecuación tendremos que $z=2$

Sustituyendo dicho valor en la 2^a

$y+4=9 \rightarrow y=5$

Sustituyendo los valores obtenidos para z e y en la 1^a

$x+5+4=11 \rightarrow x=2$

Así pues; el sistema es compatible determinado y la solución es $S=\{(2,5,4)\}$

$$b)\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 5 & 11 \\ 1 & -5 & 6 & 29 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime}=2^a-2\cdot 1^a \\ 3^{a\prime}=3^a-1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & -6 & 5 & 27 \end{array}\right)$$

$$3^{a\prime}=3^a+6\cdot 2^a\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 23 & 69 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ y+3z=7 \\ 23z=69 \end{array}\right\}$$

De la 3ª ecuación tendremos que $z=3$
Sustituyendo dicho valor en la 2^a
$y+9=7 \rightarrow y=-2$
Sustituyendo los valores obtenidos para z e y en la 1^a
$x-2+3=2 \rightarrow x=1$
Así pues; el sistema es compatible determinado y la solución es $S=\{(1,-2,3)\}$

$c)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 1 & 0 & 1 & 6 \end{array}\right)$ $3^{a\prime}=3^a-1^a\Big\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & -1 & 1 & -6 \end{array}\right)$

$3^{a\prime}=3^a+2^a\Big\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 12 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=12 \\ y+z=8 \\ 2z=2 \end{array}\right\}$$

De la 3ª ecuación tendremos que $z=1$
Sustituyendo dicho valor en la 2^a
$y+1=8 \rightarrow y=7$
Sustituyendo los valores obtenidos para z e y en la 1^a
$x+1+7=12 \rightarrow x=5$
Así pues; el sistema es compatible determinado y la solución es $S=\{(5,7,1)\}$

$d)$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 20 \\ 2 & 1 & -1 & 15 \\ 5 & -1 & 5 & 16 \end{array}\right)$ $\left.\begin{array}{c} 2^{a\prime}=2^a-2\cdot 1^a \\ 3^{a\prime}=3^a-5\cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & 20 \\ 0 & -7 & -3 & -25 \\ 0 & -21 & 0 & -84 \end{array}\right)$

Intercambiamos las columnas 2^a y 3^a , cambiamos de signo la 2ª ecuación y la 3ª ecuación

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 20 \\ 0 & 3 & 7 & 25 \\ 0 & 0 & 21 & 84 \end{array}\right)$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x+z+4y=20 \\ 3z+7y=25 \\ 21y=84 \end{array}\right\}$$

De la 3ª ecuación tendremos que $y=4$
Sustituyendo dicho valor en la 2^a
$3z+28=7 \rightarrow z=-1$
Sustituyendo los valores obtenidos para z e y en la 1^a
$x-1+16=20 \rightarrow x=5$
Así pues; el sistema es compatible determinado y la solución es $S=\{(5,4,-1)\}$

Exercise 1.6.2 *Resuelve por el método de Gauss los siguientes sistemas*

$$\left.\begin{array}{c} x+y-z=1 \\ x-y+z=1 \\ -x+y+z=1 \end{array}\right\} \qquad \left.\begin{array}{c} 3x-y+4z=2 \\ 2x+3y-3z=4 \\ x-3y-5z=-6 \\ 4x+4y+6z=18 \end{array}\right\}$$

Soluciones

$$a)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a + 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

Intercambiamos las columnas 2^a y 3^a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{c} x + z - y = 1 \\ 2z - 2y = 0 \\ 2y = 2 \end{array}\right\}$$

De la 3ª ecuación tendremos que $y = 1$

Sustituyendo dicho valor en la 2^a

$z = 1$

Sustituyendo los valores obtenidos para z e y en la 1^a

$x + 1 - 1 = 1 \rightarrow x = 1$

Así pues; el sistema es compatible determinado y la solución es $S = \{(1, 1, 1)\}$

$$b)\left.\begin{array}{l} x - 3y - 5z = -6 \\ 2x + 3y - 3z = 4 \\ 3x - y + 4z = 2 \\ 4x + 4y + 6z = 18 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -6 \\ 2 & 3 & -3 & 4 \\ 3 & -1 & 4 & 2 \\ 4 & 4 & 6 & 18 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a - 2 \cdot 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a - 3 \cdot 1^a \\ 4^{a\prime} = 4^a - 4 \cdot 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 9 & 7 & 16 \\ 0 & 8 & 19 & 20 \\ 0 & 16 & 26 & 42 \end{array}\right)$$

$$\left.\begin{array}{l} 3^{a\prime} = 9 \cdot 3^a - 8 \cdot 2^a \\ 4^{a\prime} = 9 \cdot 4^a - 16 \cdot 2^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 9 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 115 & 52 \\ 0 & 0 & 122 & 122 \end{array}\right)$$

Dividimos la 4ª por 122 y después intercambiamos esta ecuación por la 3^a

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 9 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 115 & 52 \end{array}\right) 4^{a\prime} = 4^a - 115 \cdot 3^a \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & -5 & -6 \\ 0 & 9 & 7 & 16 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -63 \end{array}\right)$$

Hemos obtenido un absurdo$\rightarrow$El sistema es incompatible

Exercise 1.6.3 *Resuelve por el método de Gauss*

$$\left.\begin{array}{c} 3x + y - z = 5 \\ 2x - y + 2z = 0 \\ y + z = 3 \end{array}\right\} \equiv \left.\begin{array}{c} y + 3x - z = 5 \\ -y + 2x + 2z = 0 \\ y + z = 3 \end{array}\right\}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime} = 2^a + 1^a \\ 3^{a\prime} = 3^a - 1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & -3 & 2 & -2 \end{array}\right)$$

$3^{a\prime} = 5 \cdot 3^a + 3 \cdot 2^a$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 5 \\ 0 & 5 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 13 & 5 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{c} y+3x-z=5 \\ 5x+z=5 \\ 13z=5 \end{array}\right\}$$

De la 3ª ecuación tendremos que $z=\dfrac{5}{13}$
Sustituyendo dicho valor en la 2^a
$5x+\dfrac{5}{13}=5 \rightarrow x=\frac{12}{13}$
Sustituyendo los valores obtenidos para z e y en la 1^a
$y+\frac{36}{13}-\frac{5}{13}=5 \rightarrow y=\frac{34}{13}$
Así pues; el sistema es compatible determinado y la solución es $S=\left\{\left(\frac{12}{13},\frac{34}{13},\frac{5}{13}\right)\right\}$

Exercise 1.6.4 *Discutir y resolver según los valores del parámetro a los sistemas*

$$a)\ \left.\begin{array}{l} 2x-y=a \\ ax+3y=4 \\ 3x-y=2 \end{array}\right\} \qquad b)\ \left.\begin{array}{l} ax+y+z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{array}\right\}$$

$$c)\ \left.\begin{array}{l} x-ay-z=0 \\ (2-2a)x+5y+z=0 \\ 4x+y=0 \end{array}\right\} \qquad d)\ \left.\begin{array}{l} x+y=1 \\ ay+z=0 \\ x+(a+1)y+az=a+1 \end{array}\right\}$$

Soluciones:

$$a)\ \left.\begin{array}{l} 2x-y=a \\ ax+3y=4 \\ 3x-y=2 \end{array}\right\} \equiv \left.\begin{array}{l} -y+2x=a \\ 3y+ax=4 \\ -y+3x=2 \end{array}\right\}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 3 & a & 4 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime}=2^a+3\cdot 1^a \\ 3^{a\prime}=3^a-1^a \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 0 & a+6 & 4+3a \\ 0 & 1 & 2-a \end{pmatrix}$$

Intercambiamos la 2^a y la 3ª ecuación

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & a \\ 0 & 1 & 2-a \\ 0 & a+6 & 4+3a \end{pmatrix}$$

$3^{a\prime}=3^a-(a+6)\cdot 1^a$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & & a \\ 0 & 1 & & 2-a \\ 0 & 0 & & a^2+7a-8 \end{array}\right)$$

Nos interesa factorizar $a^2+7a-8=(a+8)(a-1)$
El sistema inicial es equivalente a resolver

$$\left.\begin{array}{l} -y+2x=a \\ x=2-a \\ 0=(a+8)(a-1) \end{array}\right\}$$

Es evidente que:
I) Si $a\neq 1$ y $a\neq -8$ →El sistema es incompatible
II) Si $a=1 \rightarrow \left.\begin{array}{c} -y+2x=1 \\ x=1 \end{array}\right\}$ →El sistema es compatible determinado$x=1$,$y=1$
III) Si $a=-8 \rightarrow \left.\begin{array}{c} -y+2x=-8 \\ x=10 \end{array}\right\}$ →El sistema es compatible determinado$x=10$,$y=28$

b) $\left.\begin{array}{l} ax+y+z=4 \\ x-ay+z=1 \\ x+y+z=a+2 \end{array}\right\} \equiv \left.\begin{array}{l} z+x+y=a+2 \\ z+x-ay=1 \\ z+ax+y=4 \end{array}\right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 1 & 1 & -a & 1 \\ 1 & a & 1 & 4 \end{array}\right) \left.\begin{array}{l} 2^{a\prime}=2^a-1^a \\ 3^{a\prime}=3^a-1^a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & 0 & -a-1 & -a-1 \\ 0 & a-1 & 0 & -a+2 \end{array}\right)$$

Intercambiamos la 2^a y la 3ª ecuación

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & a+2 \\ 0 & a-1 & 0 & 2-a \\ 0 & 0 & -a-1 & -a-1 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente a resolver el sistema

$$\left.\begin{array}{c} z+x+y=a+2 \\ (a-1)x=2-a \\ (-a-1)y=-a-1 \end{array}\right\}$$

Casos:

I) Si $a \neq -1$ y $a \neq 1 \rightarrow$El sistema es compatible determinado y las soluciones son

$y=1, x=\frac{2-a}{a-1}, z=\frac{a^2+a-3}{a-1}$

II) Si $a=-1 \rightarrow \left.\begin{array}{c} z+x+y=1 \\ -2x=3 \end{array}\right\}$

El sistema es compatible indeterminado y la solución es

$S=\left\{\left(-\frac{3}{2}, y, -y+\frac{5}{2}\right) / y \in \Re\right\}$

III) Si $a=1 \rightarrow \left.\begin{array}{c} z+x+y=a+2 \\ 0=1 \\ -2y=-2 \end{array}\right\}$ El sistema es incompatible

c) $\left.\begin{array}{l} x-ay-z=0 \\ (2-2a)x+5y+z=0 \\ 4x+y=0 \end{array}\right\} \equiv \left.\begin{array}{l} -z-ay+x=0 \\ z+5y+(2-2a)x=0 \\ y+4x=0 \end{array}\right\}$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -a & 1 & 0 \\ 1 & 5 & 2-2a & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right) 2^{a\prime}=2^a+1^a\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 5-a & 3-2a & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

Intercambiando la 2^a y 3ª ecuación

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 5-a & 3-2a & 0 \end{array}\right) 3^{a\prime}=3^a+(a-5)\cdot 1^a\} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -a & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2a-17 & 0 \end{array}\right)$$

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver

$$\left.\begin{array}{l} -z-ay+x=0 \\ y+4x=0 \\ (2a-17)x=0 \end{array}\right\}$$

Casos:

I) Si $a=\dfrac{17}{2} \rightarrow \left.\begin{array}{c} -z-\dfrac{17}{2}y+x=0 \\ y+4x=0 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} -2z-17y+2x=0 \\ y+4x=0 \end{array}\right\}$$

De la segunda obtenemos que $y=-4x$

Sustituyendo en la 1^a $-2z+68x+2x=0$

Despejando la incógnita $z \to z = 35x$

El sistema es compatible indeterminado y la solución es el conjunto $S = \{(x, -4x, 35x)/x \in \Re\}$

II) Si $a \neq \dfrac{17}{2}$ $\to$Sistema compatible determinado. Solución trivial$\to$ $x = y = z = 0$

d) $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & a+1 & a & a+1 \end{array}\right)$ $3^{a\prime} = 3^a - 1^a\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & a & a & a \end{array}\right)$

$3^{a\prime} = 3^a - 2^a\} \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a-1 & a \end{array}\right)$

El sistema es equivalente a resolver

$$\left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ ay + z = 0 \\ (a-1)z = a \end{array}\right\}$$

Casos

I) Si $a \neq 1$ y $a \neq 0 \to z = \dfrac{a}{a-1}$

$y = -\dfrac{a}{(a-1)\,a} = \dfrac{-1}{a-1}$

$x = 1 + \dfrac{1}{a-1} = \dfrac{a}{a-1}$

El sistema es compatible determinado y la solución es:

$S = \left\{\left(\dfrac{a}{a-1}, \dfrac{-1}{a-1}, \dfrac{a}{a-1}\right)\right\}$

II) Si $a = 1 \to \left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ y + z = 0 \\ 0 = 1 \end{array}\right\}$Absurdo$\to$Sistema incompatible

III) Si $a = 0 \to \left.\begin{array}{l} x + y = 1 \\ z = 0 \\ -z = 0 \end{array}\right\}$

El sistema es compatible indeterminado y la solución es

$S = \{(1 - y, y, 0)\,/y \in \Re\}$

1.6.2 Ejercicios selectividad año 2000 (Otras comunidades)

Exercise 1.6.5 *(*Cataluña 2000) *Dado el sistema de ecuaciones lineales* $\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + z = 5 \\ 2x - 3y + z = 4 \end{array}\right\}$

a) Añade una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea incompatible

b)Añade una ecuación lineal de manera que el sistema resultante sea compatible indeterminado. Resuélvelo

Exercise 1.6.6 *(*Extremadura 2000) *Da un ejemplo de un sistema de 2 ecuaciones lineales con tres incógnitas que sea incompatible*

Exercise 1.6.7 (Castilla la Mancha 2000) *Discutir y resolver según los valores del parámetro a el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x - y = 5 \\ y + z = a \\ x - 2z = 3 \\ 2x - 3z = a \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos*

en que sea compatible

Exercise 1.6.8 *(*Galicia 2000) *Discutir y resolver según los valores del parámetro* α *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x-y+z=0 \\ \alpha y+2z=4 \\ 2y+\alpha z=4 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

Exercise 1.6.9 *(*Islas Baleares 2000*) Discutir y resolver según los valores del parámetro* k *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x-y+z=2 \\ x+ky+z=8 \\ kx+y+kz=10 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

Exercise 1.6.10 *(*Islas Canarias 2000*)Discutir y resolver según los valores del parámetro* k *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} 2x+3y-4z=1 \\ 4x+6y-kz=2 \\ x+y+kz=10 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

Exercise 1.6.11 *(*Rioja 2000*) Discutir y resolver según los valores del parámetro* m *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} y+z=1 \\ (m-1)\,x+y+z=m \\ x+(m-1)\,y-z=0 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

Exercise 1.6.12 *(*PaísVasco 2000*) Dados los sistemas* $\left.\begin{array}{c} 2x+2y-3z=1 \\ 5x-3y-2z=0 \\ x+2y+3z=5+a \end{array}\right\}$ *y* $\left.\begin{array}{c} 2x+2y-2z=2 \\ 7x-4y-3z=0 \\ x+4y+3z=8 \end{array}\right\}$ *.¿Existe algún valor de* a *de tal manera que los sistemas* S *y* T *sean equivalentes?*

Exercise 1.6.13 *(*País Vasco 2000*)Discutir y resolver según los valores del parámetro* a *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x+y+az=1 \\ 2x-y+z=1 \\ 3x+ay+z=2 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

Exercise 1.6.14 *)(*Navarra 2000) *Discutir y resolver según los valores del parámetro* α *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x+\alpha y+3z=1 \\ x+2y+\alpha z=4 \\ x+4y+3z=1 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

Exercise 1.6.15 *(*Navarra 2000) *Luis, Javier,Enrique y Fermín acuden a una plaza para reunir una colección entera de cromos. Fermín tiene 5 cromos más que la suma de Luis y Javier juntos, Enrique tiene el doble de cromos que Javier ,y Javier tiene 90 cromos menos que Enrique y Fermín juntos*
¿Cuántos cromos tiene la colección?

Exercise 1.6.16 (Zaragoza 2000) *Discutir y resolver según los valores del parámetro α el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x+z=1 \\ y+(\alpha-1)z=0 \\ x+(\alpha-1)y+\alpha z=\alpha \end{array}\right\}$

1.6.3 Ejercicios selectividad Comunidad Valenciana

Estos ejercicios se presentan divididos en dos bloques. En primer lugar los sistemas homogéneos y después los sistemas heterogéneos

Sistemas homogéneos Valencia

Exercise 1.6.17 *(Valencia 1984) Discutir y resolver según los valores del parámetro α el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} ax+y+z=0 \\ (2-a)x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right\}$

Dado el sistema $\left.\begin{array}{c} ax+y+z=0 \\ (2-a)x+y+z=0 \\ 2x+y-z=0 \end{array}\right\}$ vamos a intercambiar ecuaciones y sumandos para facilitar su resolución por el método de Gauss. El sistema quedará así:

$$\left.\begin{array}{c} y-z+2x=0 \\ y+z+ax=0 \\ y+z+(2-a)x=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & 1 & 2-a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 0 \\ 0 & 2 & -a & 0 \end{pmatrix} 3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & a-2 & 0 \\ 0 & 0 & -2a+2 & 0 \end{pmatrix}$$

Así pues; el sistema inicial es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{c} y-z+2x=0 \\ 2z+(a-2)x=0 \\ (2-2a)x=0 \end{array}\right\}$$

Posibilidades:

I) Si $a=1 \rightarrow$desaparece la 3ª ecuación quedando el sistema siguiente $\left.\begin{array}{c} y-z+2x=0 \\ 2z-1x=0 \end{array}\right\}$ que es un S.C.Indeterminado;: siendo su solución $S=\{(2z,-3z,z)\ /\ z\in\Re\}$

II) Si $a\neq 1 \rightarrow$El sistema es compatible determinado y la solución es la trivial $x=y=z=0$

Exercise 1.6.18 *(Valencia 1993) Discutir y resolver según los valores del parámetro a el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} ax+y+z=0 \\ x+ay+z=0 \\ x+y+az=0 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{c} x+y+az=0 \\ x+ay+z=0 \\ ax+y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 1 & a & 1 & 0 \\ a & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - a\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(a)}$$

Posibilidades

I) Si $a \neq 1 \rightarrow$ En la 2^a y 3ª ecuación dividimos por $1-a$ $(1-a \neq 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1+a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec + 2^a ec$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & a & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a $\left.\begin{array}{c} x+y\ +az=0 \\ -y+z=0 \\ (2+a)z=0 \end{array}\right\}$

Subcasos

- – Si $a \neq -2 \rightarrow$El sistema es compatible determinado y la solución es la trivial $z=x=y=0$
  - – Si $a=-2 \rightarrow$El sistema queda así $\left.\begin{array}{c} x+y\ -2z=0 \\ -y+z=0 \end{array}\right\}$. Éste es compatible indeterminado y el conjunto solución es $S=\{(z,z,z)\ /\ z \in \Re\}$

II) Si $a=1 \rightarrow$ La matriz de coeficientes (a) queda así $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema inicial es equivalente al sistema $x+y+z=0$. El sistema es compatible doblemente indeterminado y su conjunto solución es $S=\{(-y-z,y,z)\ /\ y,z \in \Re\}$

Resumen

I) Si $a=1 \rightarrow$ *S.C.Doblemente Indeterminado* $S=\{(-y-z,y,z)\ /\ y,z \in \Re\}$

II) Si $a \neq -2$ y $a \neq 1 \rightarrow$ *S.C.Determinado* $S=\{(0,0,0)\}$ Solución trivial

III) Si $a=-2 \rightarrow$ *S.C.Indeterminado* $S=\{(z,z,z)\ /\ z \in \Re\}$

Exercise 1.6.19 *(Valencia 1995) Discutir y resolver según los valores del parámetro a el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} ax-y+z=0 \\ x-ay+z=0 \\ x-y\ \ +az=0 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{l} x-y+az=0 \\ x-ay+z=0 \\ ax-y+z=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 0 \\ 1 & -a & 1 & 0 \\ a & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - a \cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 0 \\ 0 & a-1 & 1-a^2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{(b)}$$

Posibilidades

I) Si $a \neq 1 \rightarrow$ En la 2^a y 3ª ecuación dividimos por $1-a$ $(1-a \neq 0)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1+a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec + 2^a ec$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2+a & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a $\left.\begin{array}{r} x-y\ \ +az=0 \\ y+z=0 \\ (2+a)z=0 \end{array}\right\}$

Subcasos

- – Si $a \neq -2 \rightarrow$El sistema es compatible determinado y la solución es la trivial $z=x=y=0$
  - – Si $a=-2 \rightarrow$El sistema queda así $\left.\begin{array}{r} x-y\ -2z=0 \\ y+z=0 \end{array}\right\}$. Éste es compatible indeterminado y el conjunto solución es $S=\{(z,-z,z)\ /\ z \in \Re\}$

II) Si $a=1 \rightarrow$ La matriz de coeficientes (b) queda así $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

El sistema inicial es equivalente al sistema $x-y+z=0$. El sistema es compatible doblemente indeterminado y su conjunto solución es $S=\{(y-z,y,z)\ /\ y,z \in \Re\}$

Resumen

I) Si $a=1 \rightarrow$ *S.C.Doblemente Indeterminado* $S=\{(y-z,y,z)\ /\ y,z \in \Re\}$

II) Si $a \neq -2$ y $a \neq 1 \rightarrow$ *S.C.Determinado* $S=\{(0,0,0)\}$ Solución trivial

III) Si $a=-2 \rightarrow$ *S.C.Indeterminado* $S=\{(z,-z,z)\ /\ z \in \Re\}$

Exercise 1.6.20 *(Valencia 1996) Discutir y resolver según los valores del parámetro a el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x+y+2z=0 \\ 6x-3y+7z=0 \\ ax-3y\ -4z=0 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} y+2z+x=0 \\ -3y+7z+6x=0 \\ -3y-4z\ +ax=0 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ -3 & 7 & 6 & 0 \\ -3 & -4 & a & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec + 3\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec + 3\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 13 & 9 & 0 \\ 0 & 2 & a+3 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow {}^{7}3^a ecnueva = 13\cdot 3^a ec - 2\cdot 2^a ec \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 13 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 13a+21 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} y+2z+x=0 \\ 13z+9x=0 \\ (13a+21)x=0 \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $a=-\dfrac{21}{13}$ $\rightarrow$La tercera ecuación desaparece. El sistema resultante $\left.\begin{array}{r} y+z+2x=0 \\ 13z+9x=0 \end{array}\right\}$es compatible indeterminado y el conjunto solución es $S=\left\{(x,\frac{5}{13}x,-\frac{9}{13}x)\ /\ x\in\Re\right\}$

II) Si $a\neq-\dfrac{21}{13}$ $\rightarrow$El sistema es compatible determinado. Su solución es la trivial $x=y=z=0$

Exercise 1.6.21 *(Valencia 1999) Discutir y resolver según los valores del parámetro m el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ 3x-y+2z=0 \\ mx+y+4z=0 \end{array}\right\}$

Intercambiamos sumandos de la siguiente manera $\left.\begin{array}{r} y+z+x=0 \\ -y+2z+3x=0 \\ y+4z+mx=0 \end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & m & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec + 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 1^a ec \end{array} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & m-1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & m-5 & 0 \end{pmatrix}$$

El sitema inicial es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} y+z+x=0 \\ 3z+4x=0 \\ (m-5)x=0 \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $m\neq 5$ $\rightarrow$El sistema es compatible determinado. La solución es la trivial $x=y=z=0$

---

[7] También podríamos haber realizado esta transformación

$3^a ecnueva = 3^a ec - \dfrac{2}{13}\cdot 2^a ec$

Despues tendríamos que multiplicarla por 13

II) Si $m = 5$ →El sistema es compatible indeterminado $\left.\begin{array}{r} y+z+x=0 \\ 3z+4x=0 \end{array}\right\}$ y su solución es el conjunto

$S = \left\{ (x, \frac{x}{3}, -\frac{4x}{3}) \ / \ z \in \Re \right\}$

Dicho conjunto también se puede expresar así:

$$S = \{(3\alpha, \alpha, -4\alpha) \ / \ \alpha \in \Re\}$$

Exercise 1.6.22 *(*Valencia 2002*)Discutir y resolver según los valores del parámetro m el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+mz=0 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible.*

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x+3y+mz=0 \end{array}\right\} \rightarrow\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & m & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 2 \cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & m-2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - \cdot 2^a ec$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & m-4 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a resolver:

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ y+2z=0 \\ (m-4)z=0 \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $m \neq 4$ →Sistema compatible determinado

La solución es la solución trivial $x = y = z = 0$

II) Si $m = 4$ →Desaparece la 3ª ecuación y queda el sistema $\begin{array}{l} x+y+z=0 \\ y+2z=0 \end{array}$ que es compatible indeterminado

Siendo su solución $s = \{(z, -2z, z) \ / \ z \in \Re\}$

Exercise 1.6.23 *(Valencia* 2006*) Discutir y resolver según los valores del parámetro λ el siguiente sistema*

$$\left.\begin{array}{l} (\lambda+2)x - y + z = 0 \\ 3x + (\lambda+6)\,y - 3z = 0 \\ 5x + 5y + (\lambda-2)\,z = 0 \end{array}\right\}$$

Sistemas heterogéneos Valencia

Exercise 1.6.24 *(Valencia 1984) Discutir y resolver según los valores del parámetro a el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x+ay+z=a+2 \\ x+y+az=-2(a+1) \\ ax+y+z=a \end{array}\right\}$ *Repasar*

$$\left.\begin{array}{c} x+y+az=-2(a+1) \\ x+ay+z=a+2 \\ ax+y+z=a \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ 1 & a & 1 & a+2 \\ a & 1 & 1 & a \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - a \cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ 0 & a-1 & 1-a & 3a+4 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & 3a+2a^2 \end{array}\right) 3^a ecnueva = 3^a ec + 2^a ec$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ 0 & a-1 & 1-a & 3a+4 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & 4+6a+2a^2 \end{array}\right)$$

Factorizando los elementos de la 3ª ecuación tendremos:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & -2(a+1) \\ 0 & a-1 & 1-a & 3a+4 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & 2(a+2)(a+1) \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente a

$$\left.\begin{array}{c} x+y+az=-2(a+1) \\ (a-1)y-(a-1)z=3a+4 \\ -(a+2)(a-1)z=2(a+2)(a+1) \end{array}\right\} \qquad (ab)$$

Posibilidades

I) Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado

$$x=\frac{a}{a-1},\ y=\frac{a+2}{a-1},\ z=\frac{-2(a+1)}{a-1}$$

II) Si $a=1 \rightarrow$ Al sustituir dicho valor en (ab) tendremos $\left.\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ 0=7 \\ 0=12 \end{array}\right\}$

El sistema es incompatible

III) Si $a=-2 \rightarrow$ Al sustituir dicho valor en (ab) tendremos $\left.\begin{array}{c} x+y-2z=2 \\ -3y+3z=-2 \end{array}\right\}$

El sistema es compatible indeterminado y la solución es el conjunto $S=\left\{\left(z+\frac{4}{3}, z+\frac{2}{3}, z\right) \ / \ z \in \Re\right\}$

Exercise 1.6.25 *(Valencia 1985) Discutir y resolver según los valores del parámetro k el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x-3y-z=-4 \\ 2x+y+kz=6 \\ 7x-7y-z=k \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{c} x-3y-z=-4 \\ 2x+y+kz=6 \\ 7x-7y-z=k \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & k & 6 \\ 7 & -7 & -1 & k \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 7 \cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & k+2 & 14 \\ 0 & 14 & 6 & k+28 \end{array}\right) \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - 2 \cdot 2^a ec \left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & k+2 & 14 \\ 0 & 0 & -2k+2 & k \end{array}\right)$$

El sistema inicial es eqiuvalente al sistema

$$\left.\begin{array}{c} x-3y-z=-4 \\ 7y+(k+2)z=14 \\ (-2k+2)z=k \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $k=1 \rightarrow \left.\begin{array}{c} x-3y-z=-4 \\ 7y+3z=14 \\ 0\cdot z=1 \end{array}\right\}$ El sistema es incompatible

II) Si $k \neq 1 \rightarrow$El sistema es compatible determinado

De la 3ª ecuación obtenemos que $z=-\dfrac{1}{2}\dfrac{k}{k-1}$

Sustituyendo este valor de z en la 2ª ecuación

$7y-(k+2)\frac{1}{2}\dfrac{k}{k-1}=14 \rightarrow y=\dfrac{k^2+2k}{14(k-1)}+\dfrac{28(k-1)}{14(k-1)}=\dfrac{k^2-28+30k}{14(k-1)}$

Sustituyendo los valores de z e y en la 1^a

$x-\dfrac{3\left(k^2-28+30k\right)}{14(k-1)}+\frac{1}{2}\dfrac{k}{k-1}=-4:$

$x-\dfrac{3k^2-84+83k}{14(k-1)}=-4 \rightarrow x=\dfrac{3k^2-28+27k}{14(k-1)}$

Exercise 1.6.26 *(Valencia 1985) Discutir y resolver según los valores de los parámetros a i b el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 4x \quad +az=b \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ x-y+z=3 \\ 4x \quad +az=b \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 3 \\ 4 & 0 & a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 4\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & -4 & a-4 & b-4 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - 2\cdot 2^a ec \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & a-4 & b-8 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ -2y=2 \\ (a-4)z=b-8 \end{array}\right\}$$

Posibilidades:

I) Si $a=4$ y $b \neq 8$ en la 3ª ecuación obtenemos un absurdo. Por lo tanto; el sistema es incompatible

II) Si $a=4$ y $b=8$ la 3ª ecuación desaparece.El sistema es compatible indeterminado y las soluciones del sistema $\left.\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ -2y=2 \end{array}\right\}$ son $S=\{(2-z,-1,z)\ /\ z\in\Re\}$

III) Si $a \neq 4$ el sistema es compatible determinado y su solución es:

$x=\dfrac{2a-b}{a-4}$

$y=-1$

$z=2-\dfrac{2a-b}{a-4}=\dfrac{b-8}{a-4}$

Exercise 1.6.27 *(Valencia 1985) Discutir y resolver según los valores del parámetro*

m *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x+2y+3z=1 \\ 2x-y-5z=7 \\ 3x\ -4y\ +mz=m \\ 6x-3y-15z=21 \end{array}\right\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & -5 & 7 \\ 6 & -3 & -15 & 21 \\ 3 & -4 & m & m \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 6\cdot 1^a ec \\ 4^a ecnueva = 4^a ec - 3\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -11 & 5 \\ 0 & -15 & -33 & 15 \\ 0 & -10 & m-9 & m-3 \end{pmatrix} \begin{array}{l} 3^a ecnueva = 3^a ec - 3\cdot 1^a ec \\ 4^a ecnueva = 4^a ec - 2\cdot 1^a ec \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & -11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m+13 & m-13 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{c} x+2y+3z=1 \\ -5y-11z=5 \\ (m+13)z=m-13 \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $m=-13$ en la 3ª ecuación obtenemos un absurdo. El sistema es incompatible

II) Si $m\neq -13$ →El sistema es compatible determinado y su solución es:

$$z=\frac{m-13}{m+13}$$

$$y=-1-\frac{11(m-13)}{5(m+13)}=-\frac{2}{5}\frac{8m-39}{m+13}$$

$$x=1+\frac{4\,(8m-39)}{5\,(m+13)}-\frac{3\,(m-13)}{m+13}=\frac{2}{5}\frac{11m+52}{m+13}$$

Exercise 1.6.28 *(Valencia 1985) Discutir y resolver según los valores del parámetro* k *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x-3y-z=-4 \\ 2x+y+z=6 \\ 4x-5y-z=k \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{c} x-3y-z=-4 \\ 2x+y+z=6 \\ 4x-5y-z=k \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & k & 6 \\ 4 & -5 & -1 & k \end{pmatrix} \rightarrow, \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 4\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & k+2 & 14 \\ 0 & 7 & 3 & k+16 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & k+2 & 14 \\ 0 & 0 & -k+1 & k+2 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{c} x-3y-z=-4 \\ 7y+(k+2)z=14 \\ (-k+1)z=k+2 \end{array}\right\}$$

Posibilidades:

I) Si $k=1$ →en la 3ª ecuación obtenemos un absurdo. El sistema es incompatible

II) Si $k\neq 1$ →El sistema es compatible determinado y la solución es

$$z=\frac{k+2}{-k+1}$$

$$y=2-\frac{(k+2)\,(k+2)}{7\,(-k+1)}=\frac{-k^2-18k+10}{7\,(-k+1)}$$

$$x=-4-\frac{3\left(k^2+18k-10\right)}{7\left(-k+1\right)}+\frac{k+2}{-k+1}=\tfrac{1}{7}\frac{3k^2-16+19k}{-1+k}$$

Exercise 1.6.29 *(Valencia 1986) Discutir y resolver según los valores del parámetro k el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-4 \\ 2x+y+kz=6 \\ 7x-7y-z=k \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-4 \\ 2x+y+z=6 \\ 7x-7y-z=k \end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 2 & 1 & k & 6 \\ 7 & -7 & -1 & k \end{array}\right)\rightarrow,\quad \begin{array}{l} 2^a ecnueva=2^a ec-2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva=3^a ec-7\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & k+2 & 14 \\ 0 & 14 & 6 & k+28 \end{array}\right)\rightarrow 3^a ecnueva=3^a ec-2^a ec\left(\begin{array}{cccc} 1 & -3 & -1 & -4 \\ 0 & 7 & k+2 & 14 \\ 0 & 0 & -2k+2 & k \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-3y-z=-4 \\ 7y+(k+2)z=14 \\ (-2k+2)z=k \end{array}\right\}$$

Posibilidades:

I) Si $k=1$ $\rightarrow$en la 3ª ecuación obtenemos un absurdo. El sistema es incompatible

II) Si $k\neq 1$ $\rightarrow$El sistema es compatible determinado y la solución es

$$z=\frac{k}{2(-k+1)}$$

$$y=2-\frac{k(k+2)}{14(-k+1)}=\frac{-28+30k+k^2}{14\left(-1+k\right)}$$

$$x=-4+\frac{3\left(-28+30k+k^2\right)}{14\left(-1+k\right)}+\frac{k}{2(-k+1)}=\frac{-28+27k+3k^2}{14\left(-1+k\right)}$$

Exercise 1.6.30 *(Valencia 1989) Discutir y resolver según los valores de los parámetros λ i μ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{r} 3x-y+2z=1 \\ x+4y+z=\mu \\ 2x-5y\ +\lambda z=-2 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{r} x+4y+z=\mu \\ 3x-y+2z=1 \\ 2x-5y\ +\lambda z=-2 \end{array}\right\}\rightarrow\left(\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 1 & \mu \\ 3 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & -5 & \lambda & -2 \end{array}\right)\rightarrow,\quad \begin{array}{l} 2^a ecnueva=2^a ec-3\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva=3^a ec-2\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & -13 & -1 & 1-3\mu \\ 0 & -13 & \lambda-2 & -2-2\mu \end{array}\right)\rightarrow 3^a ecnueva=3^a ec-2^a ec\left(\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 1 & \mu \\ 0 & -13 & -1 & 1-3\mu \\ 0 & 0 & \lambda-1 & -3+\mu \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+4y+z=\mu \\ -13y-z=1-3\mu \\ (\lambda-1)z=-3+\mu \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $\lambda=1$ y $\mu\neq 3$ $\rightarrow$El sistema es incompatible; ya que en la 3ª ecuación obtenemos un absurdo

II) Si $\lambda=1$ y $\mu=3$ $\rightarrow$La tercera ecuación desaparece. El sistema resultante $\left.\begin{array}{r} x+4y+z=3 \\ -13y-z=-8 \end{array}\right\}$es compatible indeterminado

El conjunto solución es $S = \{(9y-5, y, -13y+8) \ / \ y \in \Re\}$

III) Si $\lambda \neq 1 \rightarrow$El sistema es compatible determinado. La solución es

$z = \dfrac{\mu-3}{\lambda-1}$

$-13y = +\dfrac{\mu-3}{\lambda-1} + 1 - 3\mu \Longrightarrow y = \frac{-\lambda+4-4\mu+3\mu\lambda}{13(\lambda-1)}$

$x = \mu - \frac{4(-\lambda+4-4\mu+3\mu\lambda)}{13(\lambda-1)} - \dfrac{\mu-3}{\lambda-1} = \frac{4\lambda+23-10\mu+\mu\lambda}{13(\lambda-1)}$

Exercise 1.6.31 *(Valencia* 1990*) Discutir y resolver según los valores del parámetro* λ *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x+\lambda y+z=\lambda+2 \\ x+y+\lambda z=-2(\lambda+1) \\ \lambda x+y\ +z=\lambda \end{array}\right\}$

Este sistema es el mismo que el de 1984

Exercise 1.6.32 *(Valencia* 1991*) Discutir y resolver según los valores de los parámetros* λ *i* μ *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} 2x+y+z=3 \\ y-z=-1 \\ 2x-y\ +\lambda z=\mu \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{c} 2x+y+z=3 \\ y-z=-1 \\ 2x-y\ +\lambda z=\mu \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & \lambda & \mu \end{array}\right) \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - 1^a ec$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & \lambda-1 & \mu-3 \end{array}\right) \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec + 2\cdot 2^a ec \left(\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & \lambda-3 & \mu-5 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{c} 2x+y+z=3 \\ y-z=-1 \\ (\lambda-3)z=\mu-5 \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $\lambda = 3$ y $\mu \neq 5 \rightarrow$El sistema es incompatible; ya que en la 3ª ecuación obtenemos un absurdo

II) Si $\lambda = 3$ y $\mu = 5 \rightarrow$La tercera ecuación desaparece. El sistema resultante $\left.\begin{array}{c} 2x+y+z=3 \\ y-z=-1 \end{array}\right\}$es compatible indeterminado

El conjunto solución es $S = \{(2-z, -1+z, z) \ / \ z \in \Re\}$

III) Si $\lambda \neq 3 \rightarrow$El sistema es compatible determinado. La solución es

$z = \dfrac{\mu-5}{\lambda-3}$

$y = -\dfrac{-\mu+2+\lambda}{\lambda-3}$

$x = \dfrac{-\mu-1+2\lambda}{\lambda-3}$

Exercise 1.6.33 *(Valencia* 1996*) Discutir y resolver según los valores del parámetro* m *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} 2x+3y+z=4 \\ 3x+y+mz=6 \\ -2x-10y-2z=m-4 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{c} 2x+3y+z=4 \\ 3x+y+mz=6 \\ -2x-10y-2z=m-4 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 3 & 1 & m & 6 \\ -2 & -10 & -2 & m-4 \end{array}\right)^{8}$$

$$\begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2\cdot 2^a ec - 3\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec + 1^a ec \end{array} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & 2m-3 & 0 \\ 0 & -7 & -1 & m \end{array}\right)$$

Intercambiamos filas $\left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & m \\ 0 & -7 & 2m-3 & 0 \end{array}\right)$ y después realizamos la siguiente transformación

$$3^a ecnueva = 3^a ec - 1^a ec \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 1 & 4 \\ 0 & -7 & -1 & m \\ 0 & 0 & 2m-2 & -m \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{c} 2x+3y+z=4 \\ -7y-z=m \\ (2m-2)z=-m \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $m=1$ →En la tercera ecuación obtenemos un absurdo. El sistema es incompatible

II) Si $m\neq 1$ →El sistema es compatible determinado. Su solución es :

$$z=-\frac{m}{2(m-1)}, y=-\frac{-3m+2m^2}{14(m-1)}, x=\frac{27m+3m^2-28}{14(m-1)}$$

Exercise 1.6.34 *(Valencia 1997) Discutir y resolver según los valores del parámetro a el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} x+y+az=2 \\ x+ay+z=-1 \\ ax+y\ \ +z=-1 \end{array}\right\}$

$$\left.\begin{array}{c} x+y+az=2 \\ x+ay+z=-1 \\ ax+y+z=-1 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & 2 \\ 1 & a & 1 & -1 \\ a & 1 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - a\cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & -3 \\ 0 & 1-a & 1-a^2 & -1-2a \end{array}\right) 3^a ecnueva = 3^a ec + 2^a ec$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & -3 \\ 0 & 0 & 2-a-a^2 & -4-2a \end{array}\right)$$

Factorizando los elementos de la 3ª ecuación tendremos:

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & a & 2 \\ 0 & a-1 & 1-a & -3 \\ 0 & 0 & -(a+2)(a-1) & -2(a+2) \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente a

$$\left.\begin{array}{c} x+y\ \ +az=2 \\ (a-1)y-(a-1)z=-3 \\ -(a+2)(a-1)z=-2(a+2) \end{array}\right\} \qquad (c)$$

[8] También podríamos haber realizado estas transformaciones

$2^a ecnueva = 2^a ec - \frac{3}{2}\cdot 1^a ec$

$3^a ecnueva = 3^a ec + 1^a ec$

Después tendríamos que multiplicar por 2 la 2^a

Posibilidades

I) Si $a \neq 1$ y $a \neq -2 \rightarrow$ El sistema es compatible determinado

$z = \dfrac{2}{a-1}$

$y = \dfrac{-1}{a-1}$

$x = 2 + \dfrac{1-2a}{a-1} = \dfrac{-1}{a-1}$

II) Si $a = 1 \rightarrow$ el sistema (c) queda así $\left.\begin{array}{r} x+y\ +1z=2 \\ 0=-3 \\ 0=-6 \end{array}\right\}$ El sistema es incompatible

III) Si $a = -2 \rightarrow$ el sistema (c) queda así $\left.\begin{array}{r} x+y\ -3z=2 \\ -3y+3z=-3 \end{array}\right\}$

Exercise 1.6.35 *(Valencia 2000) Discutir y resolver según los valores del parámetro m el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{c} (m+1)x+3y+mz=1 \\ 3x+(m+1)y+2z=1 \\ mx+2y+mz=2 \end{array}\right\}$

Cambiamos la 1ª ecuación por ella menos la 3^a. Con lo cual eel sistema dado es equivalente a:

$$\left.\begin{array}{c} x+y=-1 \\ 3x+(m+1)y+2z=1 \\ mx+2y+mz=2 \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 3 & m+1 & 2 & 1 \\ m & 2 & m & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 3 \cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - m \cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & m-2 & 2 & 4 \\ 0 & 2-m & m & 2+m \end{pmatrix} 3^a ecnueva = 3^a ec + 2^a ec \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & m-2 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & m+2 & 6+m \end{pmatrix}$$

El sistema equivalente obtenido es:

$$\left.\begin{array}{c} x+y=-1 \\ (m-2)y+2z=4 \\ (m+2)z=6+m \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si m$\neq 2$ y $m \neq -2 \rightarrow$El sistema es compatible determinado y la solución es.

$$\begin{array}{rcl} x & = & -\dfrac{4+m}{m+2} \\ y & = & \dfrac{2}{m+2} \\ z & = & \dfrac{6+m}{m+2} \end{array}$$

II) Si $m = -2$ El sistema es incompatible (en la 3ª ecuación obtenemos un absurdo $0 = 4$)

III Si $m = 2 \rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y=-1 \\ 2z=4 \\ 4z=8 \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} x+y=-1 \\ z=2 \end{array}\right\}$

Sistema compatible indeterminado y la solución es $S = \{(-1-y, y, 2)\ /\ y \in \Re\}$

Exercise 1.6.36 *(*Comunidad Valenciana 2000)*Discutir y resolver según los valores del parámetro λ el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=3 \\ 3x+4y+\lambda z=\lambda \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible*

$$\left.\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=3 \\ 3x+4y+\lambda z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & \lambda & \lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 3 \cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & \lambda-3 & \lambda-3 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec + 2^a ec \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda-5 & \lambda-5 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema

$$\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y+2z=2 \\ (\lambda-5)z=\lambda-5 \end{array}\right\}$$

Posibilidades

I) Si $\lambda \neq 5 \rightarrow$El sistema es compatible determinado$\rightarrow z=1, y=0, x=0$

II) Si $\lambda = 5 \rightarrow$La tercera ecuación desaparece. El sistema resultante $\left.\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ y+2z=2 \end{array}\right\}$es compatible indeterminado

El conjunto solución es $S = \{(-1+z, 2-2z, z) \ / \ z \in \Re\}$

Exercise 1.6.37 *(*Valencia 2002)*Discutir y resolver según los valores del parámetro m el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{l} mx+y+(m+1)z=0 \\ x+my+(m+3)z=1 \\ x+2z=1 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible.*

$$\left.\begin{array}{l} mx+y+(m+1)z=0 \\ x+my+(m+3)z=1 \\ x+2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Intercambiamos la} 1^a \text{ y la } 3^a \text{ ecuación} \left.\begin{array}{l} x+2z=1 \\ x+my+(m+3)z=1 \\ mx+y+(m+1)z=0 \end{array}\right\} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & m & m+3 & 1 \\ m & 1 & m+1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 2^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - m \cdot 1^a ec \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & m & m+1 & 0 \\ 0 & 1 & -m+1 & -m \end{pmatrix} \text{intercambiamos las dos últimas ecuaciones}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -m+1 & -m \\ 0 & m & m+1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - m \cdot 2^a ec$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -m+1 & -m \\ 0 & 0 & m^2+1 & m^2 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente a resolver:

$$\left.\begin{array}{l} 1x+2z=1 \\ y+(-m+1)z=-m \\ (m^2+1)z=m^2 \end{array}\right\}$$

Fijate que la ecuación $m^2+1=0$ no tiene solución real. Los elementos de la diagonal principal son todos nulos; lo que nos permite afirmar que el sistema siempre es compatible determinado sea cual sea el valor real asignado a m

$$z = \frac{m^2}{m^2+1}$$
$$y = -m + \frac{(m-1)m^2}{m^2+1} = -\frac{m\,(m+1)}{m^2+1}$$
$$x = 1 - \frac{2m^2}{m^2+1} = -\frac{m^2-1}{m^2+1}$$

Exercise 1.6.38 *(*Valencia 2003*)Discutir y resolver según los valores del parámetro* λ *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{l}\lambda x + 2z = 0\\ \lambda y - z = \lambda\\ x + 3y + z = 5\end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible.*

$\left.\begin{array}{l}\lambda x + 2z = 0\\ \lambda y - z = \lambda\\ x + 3y + z = 5\end{array}\right\}$ →Intercambiamos la 1^a y la 3ª ecuación y los sumandos de las incógnitas y y z

$\left.\begin{array}{l}x + z + 3y = 5\\ -z + \lambda y = \lambda\\ 2z + \lambda x = 0\end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -1 & \lambda & \lambda\\ \lambda & 2 & 0 & 0\end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - \lambda \cdot 1^a ec$

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -1 & \lambda & \lambda\\ 0 & 2-\lambda & -3\lambda & -5\lambda\end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec + (2-\lambda)\cdot 2^a ec$

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -1 & \lambda & \lambda\\ 0 & 0 & -\lambda-\lambda^2 & -3\lambda-\lambda^2\end{pmatrix}$ Factorizamos los coeficientes de la 3ª ecuación

$\begin{pmatrix}1 & 1 & 3 & 5\\ 0 & -1 & \lambda & \lambda\\ 0 & 0 & -\lambda(1+\lambda) & -\lambda(3+\lambda)\end{pmatrix}$

El sistema inicial es equivalente a resolver:

$\left.\begin{array}{l}x + z + 3y = 5\\ -z + \lambda y = \lambda\\ -\lambda(1+\lambda)y = -\lambda(3+\lambda)\end{array}\right\}$

Posibilidades:

I) Si $\lambda \neq 0$ y $\lambda \neq -1$ →El sistema es compatible determinado y su solución es:

$$y = \frac{\lambda+3}{\lambda+1}$$
$$z = \frac{\lambda\,(\lambda+3)}{\lambda+1} - \lambda = \frac{2\lambda}{\lambda+1}$$
$$x = 5 - \frac{2\lambda}{\lambda+1} - \frac{3\,(\lambda+3)}{\lambda+1} = -\frac{4}{\lambda+1}$$

II) Si $\lambda = 0 \rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}x + z + 3y = 5\\ z = 0\end{array}\right\}$ →El sistema es compatible indeterminado y el conjunto solución es:

$S = \{(5-3y, y, 0)\ /\ y \in \Re\}$

III) Si $\lambda = -1 \rightarrow$ $\left.\begin{array}{l}x + z + 3y = 5\\ -z - y = -1\\ 0 = 2\end{array}\right\}$ Absurdo

El sistema es incompatible

Exercise 1.6.39 *(*Valencia 2004*)Discutir y resolver según los valores del parámetro* λ *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{l} x-y+z=\lambda \\ \lambda x+2y-z=3\lambda \\ 2x+\lambda y-2z=6 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible.*

$\left.\begin{array}{l} x-y+z=\lambda \\ \lambda x+2y-z=3\lambda \\ 2x+\lambda y-2z=6 \end{array}\right\}$ →Intercambiamos la 2^a y la 3ª ecuación

$\left.\begin{array}{l} x-y+z=\lambda \\ 2x+\lambda y-2z=6 \\ \lambda x+2y-z=3\lambda \end{array}\right\} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ 2 & \lambda & -2 & 6 \\ \lambda & 2 & -1 & 3\lambda \end{pmatrix} \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 3^a ec - 2\cdot 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - \lambda \cdot 1^a ec \end{array}$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda+2 & -4 & 6-2\lambda \\ 0 & \lambda+2 & -1-\lambda & 3\lambda-\lambda^2 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ecnueva = 3^a ec - 2^a ec$

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda+2 & -4 & 6-2\lambda \\ 0 & 0 & 3-\lambda & 5\lambda-\lambda^2-6 \end{pmatrix}$ Factorizamos los coeficientes de la 3ª ecuación

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \lambda \\ 0 & \lambda+2 & -4 & 6-2\lambda \\ 0 & 0 & -(\lambda-3) & -(\lambda-2)(\lambda-3) \end{pmatrix}$:

El sistema inicial es equivalente a resolver:

$\left.\begin{array}{l} x-y+z=\lambda \\ (\lambda+2)y-4z=6-2\lambda \\ -(\lambda-3)z=-(\lambda-2)(\lambda-3) \end{array}\right\}$

Posibilidades:

I) Si $\lambda \neq 3$ y $\lambda \neq -2$ →El sistema es compatible determinado y su solución es:

$z=\lambda-2$

$(\lambda+2)y = 6-2\lambda+4(\lambda-2) \rightarrow y = \dfrac{2(\lambda-1)}{\lambda+2}$

$x = \lambda + \dfrac{2(\lambda-1)}{\lambda+2} - (\lambda-2) = \frac{4\lambda+2}{\lambda+2}$

II) Si $\lambda = 3 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y+z=3 \\ 5y-4z=0 \end{array}\right\}$ →El sistema es compatible indeterminado y el conjunto solución es:

$S = \left\{ (3-\dfrac{z}{5}, \dfrac{4z}{5}, z) \ / \ z \in \Re \right\}$

III) Si $\lambda = -2 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x-y+z=\lambda \\ -4z=10 \\ 5z=0 \end{array}\right\}$ Absurdo

El sistema es incompatible

Exercise 1.6.40 *(*Valencia 2005*)Discutir y resolver según los valores del parámetro* α *el siguiente sistema* $\left.\begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2 z=1 \\ x+\alpha y+\alpha z=\alpha \\ x+\alpha^2 y+\alpha^2 z=\alpha^2 \end{array}\right\}$ *resolviéndolo en los casos en que sea compatible.*

$$\left.\begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2 z=1 \\ x+\alpha y+\alpha z=\alpha \\ x+\alpha^2 y+\alpha^2 z=\alpha^2 \end{array}\right\} \rightarrow \left(\begin{array}{cccc} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 1 & \alpha & \alpha & \alpha \\ 1 & \alpha^2 & \alpha^2 & \alpha^2 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ecnueva = 3^a ec - 1^a ec \\ 3^a ecnueva = 3^a ec - 1^a ec \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 0 & 0 & \alpha-\alpha^2 & \alpha-1 \\ 0 & \alpha^2-\alpha & 0 & \alpha^2-1 \end{array}\right) \text{Intercambiamos la } 2^a \text{ y la } 3^a \text{ ecuación}$$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha^2-\alpha & 0 & \alpha^2-1 \\ 0 & 0 & \alpha-\alpha^2 & \alpha-1 \end{array}\right) \text{Factorizamos los coeficientes de la } 2^a \text{ y la}$$

3^a

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & \alpha & \alpha^2 & 1 \\ 0 & \alpha(\alpha-1) & 0 & (\alpha-1)(\alpha+1) \\ 0 & 0 & -\alpha(\alpha-1) & \alpha-1 \end{array}\right)$$

El sistema inicial es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{l} x+\alpha y+\alpha^2 z=1 \\ \alpha(\alpha-1)y=(\alpha-1)(\alpha+1) \\ -\alpha(\alpha-1)z=\alpha-1 \end{array}\right\}$$

Posibilidades:

I) Si $\alpha \neq 0$ y $\alpha \neq 1$ →El sistema es compatible determinado y su solución es:

$z=\dfrac{-1}{\alpha}$

$y=\dfrac{\alpha+1}{\alpha}$

$x=0$

II) Si $\alpha=0 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x=1 \\ 0=0 \\ 0=-1 \end{array}\right\}$ Absurdo

El sistema es incompatible

III)Si $\alpha=1 \rightarrow x+y+z=1$ El sistema es compatible indeterminado

La solución es $S=\{(1-y-z,y,z)\ /\ y,z \in \Re\}$

Exercise 1.6.41 *(Valencia 2007) Discutir y resolver según los valores del parámetro α el siguiente sistema*

$$\left.\begin{array}{l} x+\alpha y+z=9 \\ 3x+5y+z=9 \\ \alpha x+y+z=9 \end{array}\right\}$$

1.6.4 Exámenes personales

Examen Cou 1999-2000

1) Resolver el sistema $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ -2x-y+z=2 \\ -x+2z=4 \end{array}\right.$

$$\left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \begin{array}{l} 2^a ec + 2\cdot 1^a \\ 3^a ec + 1^a \end{array} \left(\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{array}\right)^{9} \rightarrow 3^a ec - 2^a$$

[9] Ja podrieu veure que el sistema és incompatible.Fixa't en la segona i tercera equació

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x+y+z=1 \\ y+3z=4 \\ 0=1 \end{cases} \quad \textit{Absurdo}$$

El sistema es incompatible

2) Discutir el sistema $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ 2x+y-3z=1 \\ x+5y+az=b \end{cases}$ según los valores del parámetro a y b . En los casos en que sea compatible, determinar la solución.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a ec - 2\cdot 1^a \\ 3^a ec - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & a+1 & b-2 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ec + 2^a$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a & b-5 \end{pmatrix}$$ El sistema inicial es equivalente al sistema $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -3y-z=-3 \\ az=b-5 \end{cases}$

Posibilidades:

I Si $a \neq 0$ i $b \in \Re$ el sistema es **compatible determinado**

Las soluciones del sistema $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -3y-z=-3 \\ az=b-5 \end{cases}$ son las siguientes:

De la última ecuación obtenemos $\boxed{z=\dfrac{b-5}{a}}$

Sustituyendo esta incógnita en la segunda ecuación tenemos:

$$-3y-\frac{b-5}{a}=-3 \rightarrow \boxed{y=\frac{3a-b+5}{3a}}$$

Sustituyendo las dos incógnitas en la primera ecuación:

$$x+\frac{2\,(3a-b+5)}{3a}-\frac{b-5}{a}=2 \rightarrow x=\frac{6a-2\,(3a-b+5)+3(b-5)}{3a}$$

Obtenemos $\boxed{x=\dfrac{5b-25}{3a}}$

El conjunto solución es $H=\left\{\left(\dfrac{5b-25}{3a},\dfrac{3a-b+5}{3a},\dfrac{b-5}{a}\right)\right\}$

II Si $a=0$ i $b=5$ la tercera ecuación desaparece y por lo tanto el sistema quedará de la siguiente manera $\begin{cases} x+2y-z=2 \\ -3y-z=-3 \end{cases}$ .Evidentemente se trata de un **sistema compatible indeterminado**

Hemos de obtener las incógnitas x e y en función de la incógnita z

Despejando de la tercera $y \rightarrow y=\dfrac{3-z}{3} \rightarrow \boxed{y=1-\dfrac{z}{3}}$

Sustituyendo en la primera y despejando x tendremos

$$x+\frac{2\,(3-z)}{3}-z=2 \rightarrow \boxed{x=\frac{5z}{3}}$$

El conjunto solución es $H=\left\{\left(\dfrac{5z}{3},1-\dfrac{z}{3},z\right)/z\in\Re\right\}$ [10]

[10] Si assignem a z el valor $3\dot{\alpha}$ Aleshores $H=\{(5\alpha,1-\alpha,3\alpha)\,/\alpha\in\Re\}$

III Si $a = 0$ i $b \neq 5$ en la tercera ecuación obtenemos un absurdo→**Sistema incompatible**

3) Dado el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \\ x + 5y + az = 0 \end{cases}$ determinar el valor de a para que el sistema tenga soluciones distintas de la trivial. En ese caso, calcula las soluciones

Com el sistema es homogéneo ;entonces realmente nos piden los valores de a para que el sistema sea compatible indeterminado (ya que si fuese compatible determinado la única solución del sistema seria la trivial $x = y = z = 0$)

Aplicando Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a ec - 2 \cdot 1^a \\ 3^a ec - 1^a \end{matrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3^a ec + 2^a \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial es equivalente al sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \\ (a+8)z = 0 \end{cases}$

Posibilidades:

I Si $a \neq -8$ →El sistema es compatible determinado y además homogéneo la única solución es la trivial $x = y = z = 0$

II Si $a = -8$ la tercera ecuación desaparece y el sistema equivalente obtenido es éste:

$$\left.\begin{matrix} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \end{matrix}\right\}$$

Despejando la incógnita y tendremos: $\boxed{y = \dfrac{7z}{3}}$

Sustituyéndola en la primera y después despejando $x \rightarrow \boxed{x = \dfrac{-11z}{3}}$

El conjunto solució es $H = \left\{ \left(\dfrac{-11z}{3}, \dfrac{7z}{3}, z \right) / z \in \Re \right\}$ [11]

Ejemplo de examen (en valencià) curs 2005-2006

1) Resoleu el sistema $\begin{cases} x + y + z = 1 \\ -2x - y + z = 2 \\ -x + 2z = 4 \end{cases}$

[11] Si assignem a z el valor $3\dot{\alpha}$ Aleshores $H = \{(-11\alpha, 7\alpha, 3\alpha) / \alpha \in \Re\}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a ec + 2 \cdot 1^a \\ 3^a ec + 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}^{12} \rightarrow 3^a ec - 2^a$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} x + y + z = 1 \\ y + 3z = 4 \\ 0 = 1 \end{cases} \quad \textit{Absurde}$$

El sistema és incompatible

2) Discutiu el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ 2x + y - 3z = 1 \\ x + 5y + az = b \end{cases}$ segons els valors del paràmetres a i b . En els casos en que siga compatible, heu de determinar la solució.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 5 & a & b \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} 2^a ec - 2 \cdot 1^a \\ 3^a ec - 1^a \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 3 & a+1 & b-2 \end{pmatrix} \rightarrow 3^a ec +$$

2^a

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & a & b-5 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial és equivalent al sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y - z = -3 \\ az = b - 5 \end{cases}$

Posibilitats:

I Si $a \neq 0$ i $b \in \Re$ el sistema és **compatible determinat.**

Les solucions del sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y - z = -3 \\ az = b - 5 \end{cases}$ son les següents:

De l'última equació obtenim $\boxed{z = \dfrac{b-5}{a}}$

Substituint aquesta incògnita en la segona equació tenim:

$$-3y - \frac{b-5}{a} = -3 \rightarrow \boxed{y = \frac{3a - b + 5}{3a}}$$

Substituint les dues incògnites en la primera equació:

$$x + \frac{2\,(3a - b + 5)}{3a} - \frac{b-5}{a} = 2 \rightarrow x = \frac{6a - 2\,(3a - b + 5) + 3(b-5)}{3a}$$

Obtenim $\boxed{x = \dfrac{5b - 25}{3a}}$

El conjunt solució és $H = \left\{ \left(\dfrac{5b-25}{3a}, \dfrac{3a - b + 5}{3a}, \dfrac{b-5}{a} \right) \right\}$

II Si $a = 0$ i $b = 5$ la tercera equació desapareix i per lo tant el sistema quedarà de la següent manera $\begin{cases} x + 2y - z = 2 \\ -3y - z = -3 \end{cases}$ .Evidentment es tracta d'un **sistema compatible indeterminat**

Hem d'obtindre les incògnites x i y en funció de la incògnita z

[12] Ja podrieu veure que el sistema és incompatible.Fixa't en la segona i tercera equació

$$\text{Aïllant de la tercera } y \to y = \frac{3-z}{3} \to \boxed{y = 1 - \frac{z}{3}}$$

Substituint en la primera i aïllant x tindrem

$$x + \frac{2(3-z)}{3} - z = 2 \to \boxed{x = \frac{5z}{3}}$$

$$\text{El conjunt solució és } H = \left\{ \left(\frac{5z}{3}, 1 - \frac{z}{3}, z \right) / z \in \Re \right\}$$ [13]

III Si $a = 0$ i $b \neq 5$ en la tercera equació obtenim un absurde→**Sistema incompatible**

3) Donat el sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ 2x + y + 5z = 0 \\ x + 5y + az = 0 \end{cases}$ determineu el valor de a perquè el sistema tinga soluciones distintes de la trivial. En eixe cas, calculeu les solucions

Com el sistema es homogeni; aleshores, realment ens demanen els valors de a per a que el sistema siga compatible indeterminat (ya que si fos compatible determinat l'única solució del sistema seria la trivial $x = y = z = 0$)

Aplicant Gauss

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & 5 & a & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 2^a ec - 2 \cdot 1^a \\ 3^a ec - 1^a \end{matrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 3 & a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$3^a ec + 2^a \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 7 & 0 \\ 0 & 0 & a+8 & 0 \end{pmatrix}$$

El sistema inicial és equivalent al sistema $\begin{cases} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \\ (a+8)z = 0 \end{cases}$

Posibilitats:

I Si $a \neq -8$ →El sistema és compatible determinat i a més a més al ser homogeni l'única solució es la trivial $x = y = z = 0$

II Si $a = -8$ la tercera equació desapareix i el sistema equivalen obtingut és aquest:

$$\left. \begin{matrix} x + 2y - z = 0 \\ -3y + 7z = 0 \end{matrix} \right\}$$

Aïllant la incògnita y tindrem: $\boxed{y = \frac{7z}{3}}$

Substituint-la en la primera i després aïllant $x \to \boxed{x = \frac{-11z}{3}}$

$$\text{El conjunt solució és } H = \left\{ \left(\frac{-11z}{3}, \frac{7z}{3}, z \right) / z \in \Re \right\}$$ [14]

[13] Si assignem a z el valor $3\dot{\alpha}$ Aleshores $H = \{(5\alpha, 1-\alpha, 3\alpha) / \alpha \in \Re\}$

[14] Si assignem a z el valor $3\dot{\alpha}$ Aleshores $H = \{(-11\alpha, 7\alpha, 3\alpha) / \alpha \in \Re\}$

Chapter 2

Límites

2.1 Conceptos previos

Definition 1 *Entorno abierto de centro x_o y radio r*

$$E_r(x_o) = \{x \in R / d(x, x_o) < r\} = \{x \in R / \, |x - x_o| < r\} =$$
$$\{x \in R / -r < x - x_o < r\} = \{x \in R / x_o - r < x < x_o + r\} =]x_o - r, x_o + r[$$

Definition 2 *Entorno abierto reducido de centro x_o y radio r*

$$E_r^*(x_o) = \{x \in R / 0 < d(x, x_o) < r\} = \{x \in R / 0 < |x - x_o| < r\} =$$
$$\{x \in R \sim \{x_o\} / -r < x - x_o < r \ \} = \{x \in R \sim \{x_o\} / x_o - r < x < x_o + r\}$$
$$=]x_o - r, x_o + r[\sim \{x_o\}$$

2.2 Límites de una función en un punto

Estudiar el límite de una función en un punto x_o es lo mismo que estudiar el comportamiento de dicha función en un entorno reducido de centro x_o y radio ,r, tan pequeño como deseemos ($E_r^*(x_o) =.]x_o - r, x_o + r[\sim \{x_o\}$)

Las situaciones que se pueden presentar son las siguientes:

2.2.1 a)Función convergente en x_0

Si $\exists \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l$ (*un número* real) diremos que la función es *convergente* en x_o

Definition 3 $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ /si \left[\begin{array}{c} 0 < |x - x_o| < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{array} \right] \Rightarrow$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ /\text{si} \left[\begin{array}{c} x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \sim \{x_o\} \\ y \\ x \in D(f) \end{array} \right] \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

Condición necesaria y suficiente para que una función sea convergente en x_0

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \exists \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) \\ \exists \lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) \\ \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = l \end{pmatrix}$$

Nota 1: $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = l$ (*un número* real)

Definition 4 $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ /*si* $\begin{bmatrix} 0 < x - x_o < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ /si } \begin{bmatrix} x \in (x_o, x_o + \delta) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

Nota 2: $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = l$ (*un número* real)

Definition 5 $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ /*si* $\begin{bmatrix} 0 < x_o - x < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ /si } \begin{bmatrix} x \in (x_o - d, x_o) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

Ejemplos de funciones convergentes en x_0

Example 6 *Demuestra que* $\lim\limits_{x\to 2}(3x + 3) = 9$

Proof. Dado un $\varepsilon > 0$ ¿para qué δ se verifica que$|f(x) - 9| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 2| < \delta$?

Fíjate que:

$$|3x + 3 - 9| < \varepsilon \Leftrightarrow |3(x - 2)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Por lo tanto; bastaría con escoger como δ el valor $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ■

Observa que $\lim\limits_{x\to 2}(3x + 3) = 9 = f(2)$

Example 7 *Demuestra que dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x^2}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ *se verifica que* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x^2}{x} = 1$

Proof. Dado un $\varepsilon > 0$ ¿para qué δ se verifica que$|f(x) - 1| < \varepsilon$ siempre que

$0 < |x| < \delta$?

Fíjate que

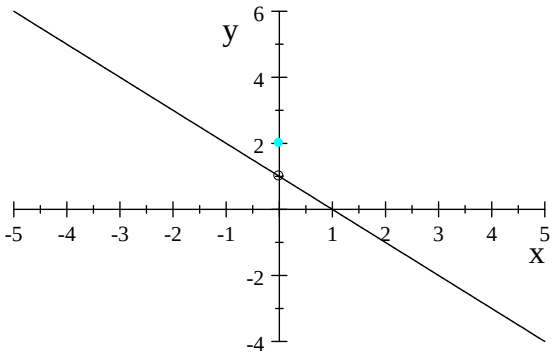
$$|f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x - x^2}{x} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-x^2}{x}\right| < \varepsilon$$

Y como x ha de ser no nulo; entonces :$|f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon$

Por lo tanto; bastaría con escoger como δ el valor $\delta \leq \varepsilon$

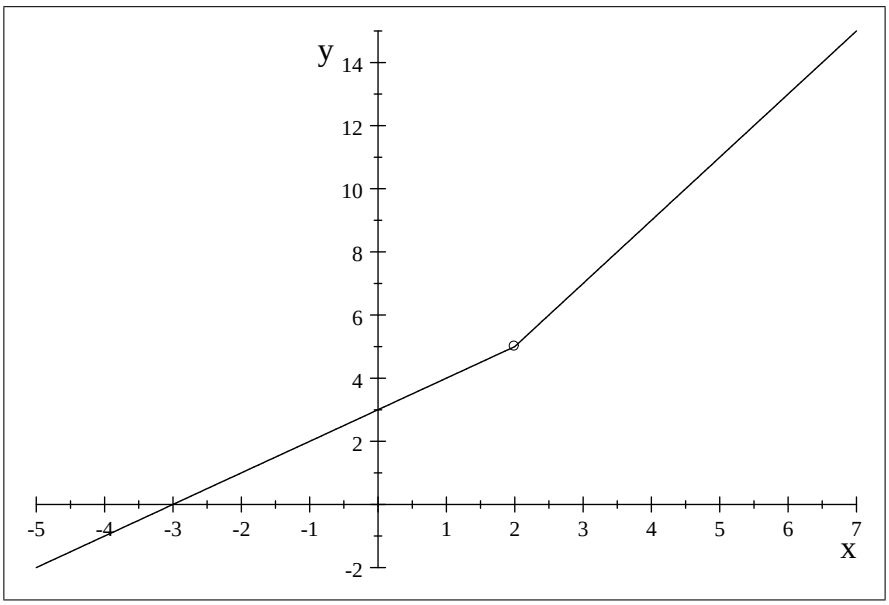
Luego, la función dada verifica que $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ *.Este límite no coincide con* $f(0) = 2$ ■

La gráfica de la función $f(x)$ coincide con la de la recta $g(x) = 1 - x$ si a esta última le quitamos el punto de coordenadas $(0, 1)$



Gráfica de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x^2}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

Example 8 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3 + x & x < 2 \\ 2x + 1 & x > 2 \end{cases}$ comprueba que $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$



$\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x+1) = 5 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3+x) = 5$

Es digno de resaltar, que existe $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ y no existe $f(2)$

2.2.2 b) Función continua en x_0

Un tipo muy particular de funciones convergentes en un punto x_0, son las funciones continuas. Su definición es la siguiente:

Definition 9 Sea f una función definida en un intervalo I y sea $x_0 \in I$.Diremos que la función f es continua en un punto x_0 si $\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

Nota 1: Las funciones elementales son continuas en todo punto de su dominio. Así pues; para calcular el límite de una función elemental en un punto de su dominio, bastará con sustituir la x por el punto x_0.

Nota2: Si una función f es continua en $x_0 \Rightarrow f$ es convergente en x_0

Nota3: Si una función f es convergente en $x_0 \not\Rightarrow f$ sea continua en x_0.

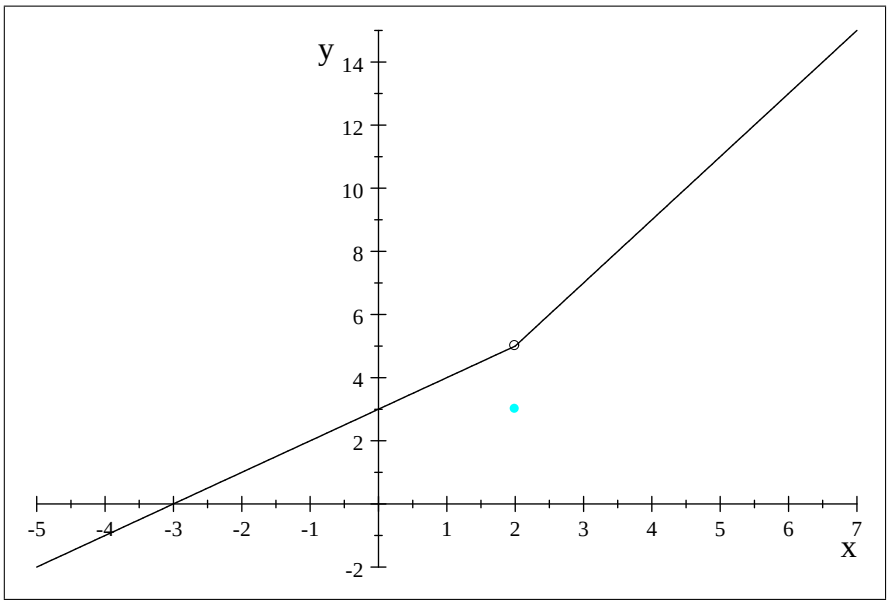
Existen funciones convergentes en x_0 y sin embargo no continuas en él.

Example 10 *La función $f(x) = \dfrac{x-x^2}{x}$ en el punto $x = 0$ (Es convergente pero no es continua en $x = 0$)*

El dominio de definición de esta función es $\Re \sim \{0\}$. Luego f ya no puede ser continua en $x = 0$,y sin embargo; si que es convergente en $x = 0$ ya que $\lim_{x\to 0} \dfrac{x-x^2}{x} = 1$ como hemos comprobado con anterioridad

Nota 4: Si $\lim_{x\to x_o} f(x) = l \neq f(x_o)$ diremos que la función no es continua en $x = x_o$. Diremos que para dicho valor la función presenta una discontinuidad evitable.

Example 11 *Un ejemplo de esta situación es la función* $f(x) = \begin{cases} 3+x & x<2 \\ 3 & x=2 \\ 2x+1 & x>2 \end{cases}$

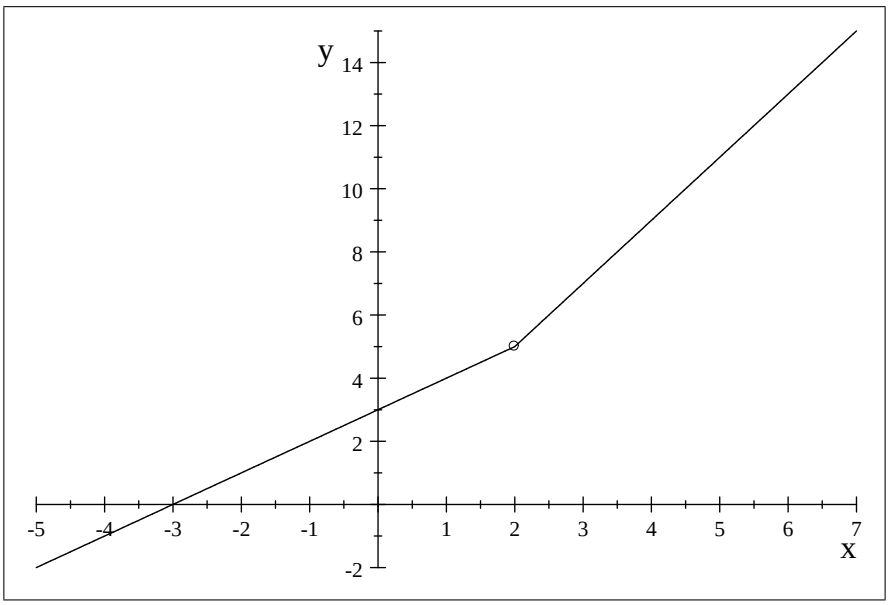


Esta función verifica que $\lim_{x\to 2} f(x) = 5 \neq f(2) = 3$.

Esta función no es continua para $x = 2$;presentando en dicho punto una discontinuidad evitable

Nota 5: Si $\lim_{x\to x_o} f(x) = l$ *y no existe* $f(x_o)$ *la función tampoco es continua en* $x = x_o$*. Diremos que para dicho valor la función presenta una discontinuidad evitable.*

Example 12 *Un ejemplo de esta situación es la función* $f(x) = \begin{cases} 3+x & x<2 \\ 2x+1 & x>2 \end{cases}$

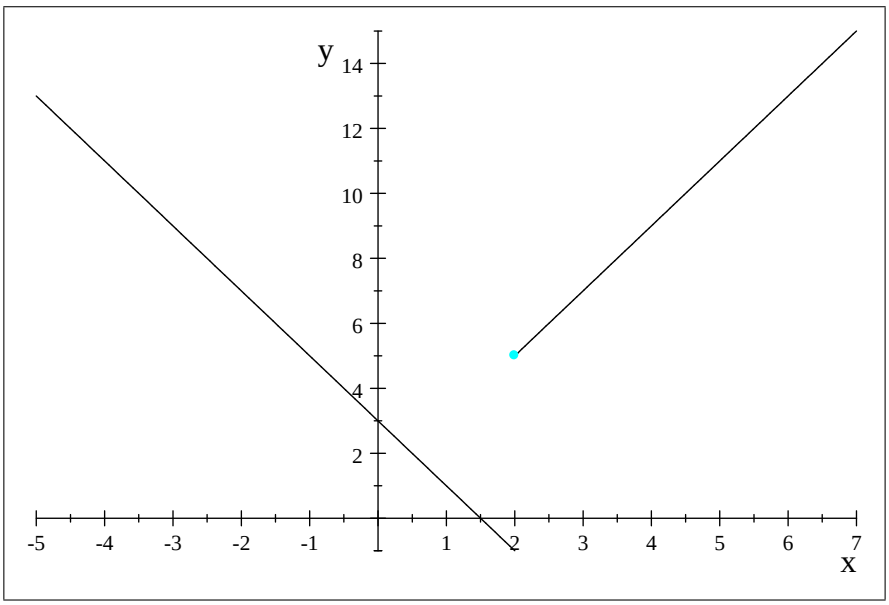


Esta función verifica que $\lim_{x\to 2} f(x) = 5$ y no existe $f(2)$.

Esta función no es continua para $x = 2$;presentando en dicho punto una discontinuidad evitable

Nota 6: Si no existe $\lim_{x\to x_o} f(x)$ *porque sus límites laterales son diferentes y finitos; aunque exista o no* $f(x_o)$ *la función tampoco es continua en* $x = x_o$*. Diremos que para dicho valor la función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.*

Example 13 *Un ejemplo de esta situación es la función* $f(x) = \begin{cases} 3-2x & x<2 \\ 2x+1 & x\geq 2 \end{cases}$



Como $\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x+1) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3-2x) = -1\end{array}\right\}$ →No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y $f(2) = 5$

La función no es continua para $x = 2$. Presenta para $x = 2$ una discontinuidad inevitable de salto finito

2.2.3 c) Función divergente a $+\infty$ en x_0

$\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$

Si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ ⇔La recta $x = x_0$ es una asíntota vertical, de ramas convergentes, de la gráfica de la función $f(x)$

Si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ ⇒La función presenta para $x = x_o$ una discontinuidad de salto infinito

Definition 14 $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0$*(tan grande como queramos)* $\exists \delta > 0$ $/si \left[\begin{array}{c} 0 < |x - x_o| < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{array}\right] \Rightarrow f(x) > k$

$\Leftrightarrow \forall k > 0$(tan grande como queramos) $\exists \delta > 0$/si $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \sim \{x_o\} \Rightarrow f(x) \in (k, +\infty)$

Example 15 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{7}{(x-2)^2} = +\infty$ *(La recta $x = 2$ es una asíntota vertical (ramas convergentes) de la gráfica de la función)*

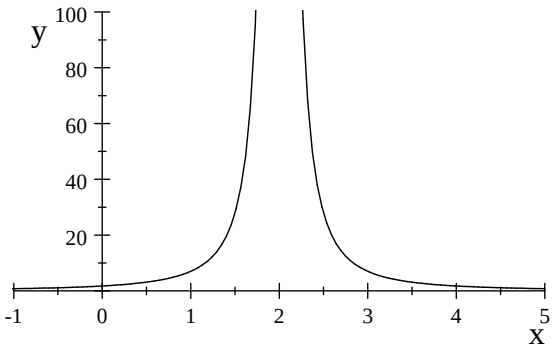
Proof. Dado un $K > 0$ ¿para qué δ se verifica que$f(x) > K$ siempre que $0 < |x - 2| < \delta$?

Fíjate que:

$$\frac{7}{(x-2)^2} > K \Leftrightarrow (x-2)^2 < \frac{7}{k} \Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{\tfrac{7}{k}}$$

Por lo tanto; bastaría con escoger como δ el valor $\delta \leq \sqrt{\frac{7}{k}}$

Observa que si K es un número positivo dado, cada vez mayor; entonces el δ encontrado será cada vez más pequeño ■



2.2.4 d) Función divergente a -∞ en x_0

$\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty$ (Función divergente a $-\infty$ en x_0)

Si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$La recta $x = x_0$ es una asíntota vertical (ramas convergentes) de la gráfica de la función $f(x) \Leftrightarrow$

Si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty \Rightarrow$La función presenta para $x = x_o$ una discontinuidad de salto infinito

Definition 16 $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0$*(tan grande como queramos)* $\exists\delta > 0$ */si* $0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow f(x) < -k$

$\Leftrightarrow \forall k > 0$ (tan grande como queramos) $\exists\delta > 0$/si $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \sim \{x_o\} \Rightarrow f(x) \in (-\infty, -k)$

Example 17 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{-7}{(x-2)^2} = -\infty$ *(La recta $x = 2$ es una asíntota vertical, de ramas convergentes, de la gráfica de la función $f(x) = \dfrac{-7}{(x-2)^2}$*

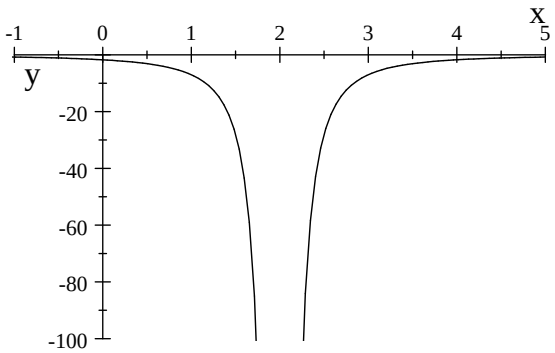
Proof. Dado un $K > 0$ ¿para qué δ se verifica que$f(x) < -K$ siempre que $0 < |x - 2| < \delta$?

Fíjate que:

$$\frac{-7}{(x-2)^2} < -K \Leftrightarrow (x-2)^2 < \frac{7}{k} \Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{\tfrac{7}{k}}$$

Por lo tanto; bastaría con escoger como δ el valor $\delta \leq \sqrt{\frac{7}{k}}$

Observa que si K es un número positivo dado cada vez mayor; entonces el δ encontrado será cada vez más pequeño ■



Asíntota vertical de una función

Definition 18 *Si alguno de los límites laterales siguientes* $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ *ó* $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$ *da* $+\infty$ *ó* $-\infty$ *diremos que la recta $x = x_0$ es una asíntota vertical de la función $y = f(x)$*

Nota: Pueden existir asíntotas verticales

1. De ramas divergentes $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$(ó $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$)
2. De ramas convergentes $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$(ó $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$)
3. Como también pueden existir asíntotas verticales, solamente por un lado (Por ejemplo: $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = l$)

En todas estas situaciones donde $x = x_o$ *sea una asíntota vertical de la función, diremos que la función para* $x = x_o$ *presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito*

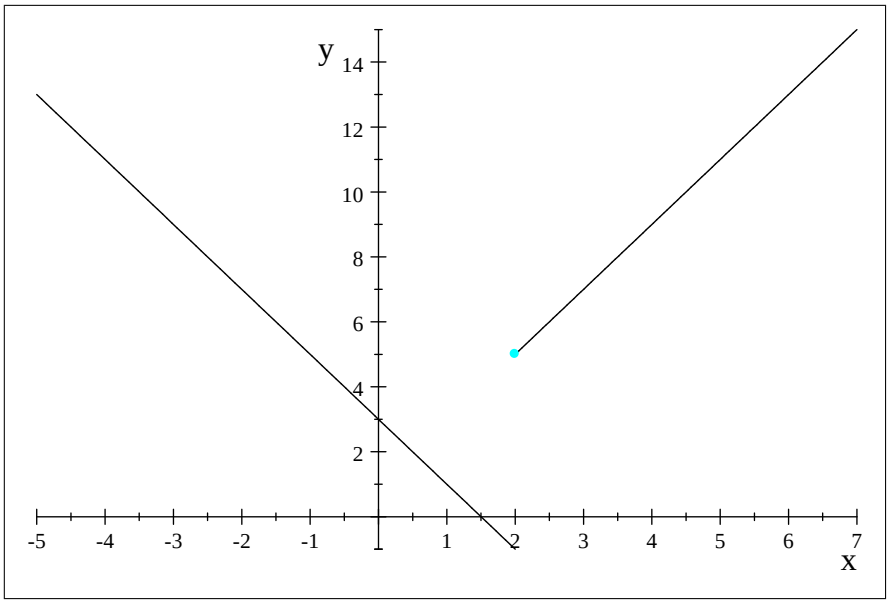
Intenta considerar tú, todas las opciones posibles para que la recta $x = x_0$ sea una asíntota vertical

2.2.5 e) Inexistencia del límite

Puede ocurrir que :

1. No exista $\lim_{x\to x_o} f(x)$, debido a que sus límites laterales sean diferentes (Discontinuidad de salto finito)

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x & x<2 \\ 2x+1 & x\geq 2 \end{cases}$$

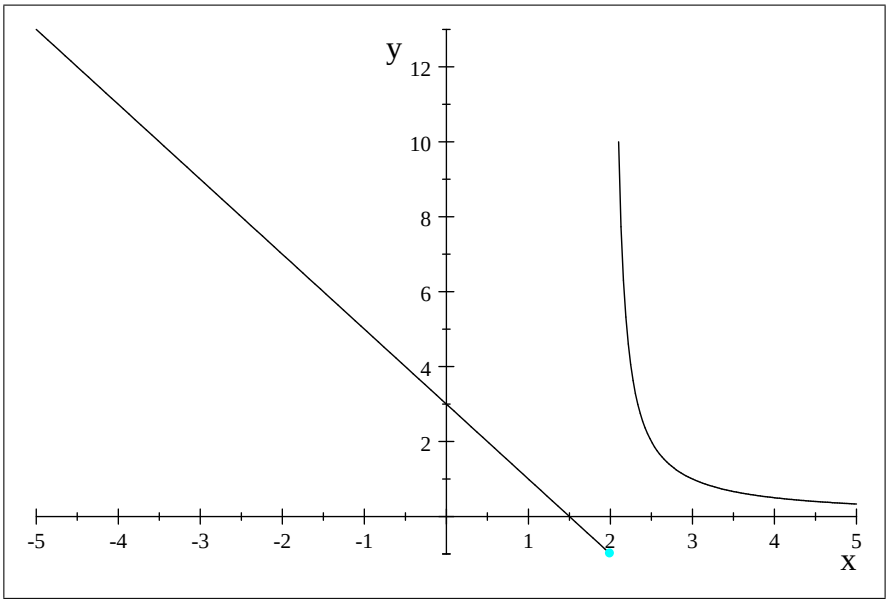


Como $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x+1) = 5$ y $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3-2x) = -1$. Entonces; no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$ aunque $f(2) = 5$

La función no es continua para $x = 2$. Presenta para $x = 2$ una discontinuidad inevitable de salto finito

2 No exista $\lim_{x \to x_o} f(x)$,debido a que la recta $x = x_o$ sea asíntota vertical (al menos por un lado)

$$f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & x > 2 \end{cases}$$

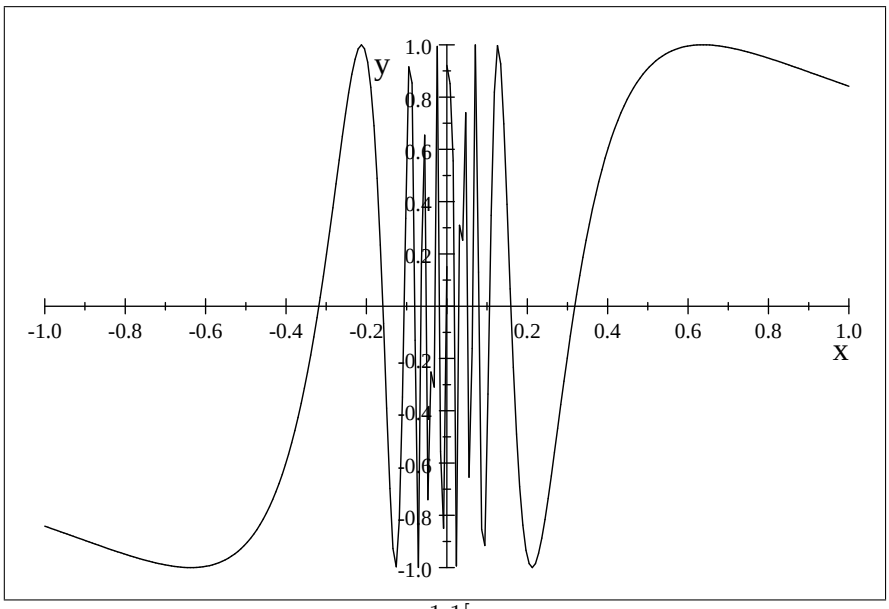


Como $\left.\begin{array}{l} \lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty \\ \lim_{x \to 2^-} f(x) = \lim_{x \to 2^-} (3 - 2x) = -1 \end{array}\right\}$ →No existe $\lim_{x \to 2} f(x)$ aunque $f(2) = -1$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical por la derecha de la función. La función presenta para $x = 2$ una discontinuidad inevitable de salto infinito.

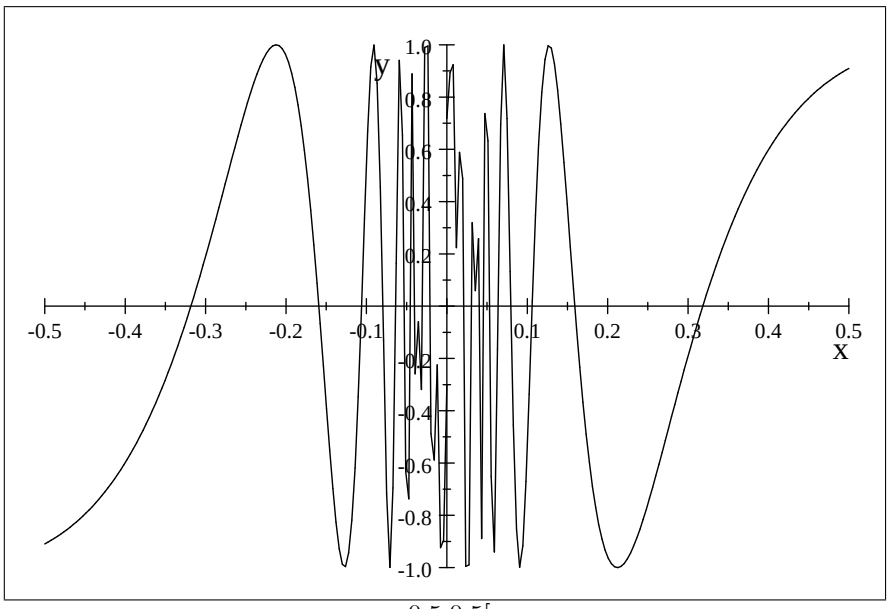
3 No exista $\lim_{x \to x_o} f(x)$ debido al comportamiento de la función en un entorno reducido de centro x_0 y radio tan pequeño como deseemos (Oscilación brusca)

No existe $\lim_{x \to 0} \sin(\dfrac{1}{x})$.Fíjate como oscila la función en $]-1, 1[$



-1,1[

Fíjate como oscila la función en $]-0.5, 0.5[$



-0.5,0.5[

2.3 Algebra de los límites

Como las funciones se pueden operar entre sí utilizando las operaciones elementales de suma, resta, multiplicación , división y potencia; pueden darse situaciones en las que el límite se puede calcular directamente; para lo cual tendrás que recordar:

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=b\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\pm g(x)\right)=a\pm b\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=a\cdot b\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{a}{b}\text{ siempre que } b\neq 0\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a\ (a\neq 0)\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\pm\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\left\{\begin{array}{l}+\infty\text{ si } a>0\\ -\infty\text{ si } a<0\end{array}\right.\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{a}{+\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)=\dfrac{+\infty}{a}=\left\{\begin{array}{l}+\infty\text{ si } a>0\\ -\infty\text{ si } a<0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=-\infty\end{array}\right\}\Longrightarrow\left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\pm g(x)\right)=\mp\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(f(x)\cdot g(x)\right)=\left\{\begin{array}{l}-\infty\text{ si } a>0\\ +\infty\text{ si } a<0\end{array}\right.\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{a}{-\infty}=0\\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)=\dfrac{-\infty}{a}=\left\{\begin{array}{l}-\infty\text{ si } a>0\\ +\infty\text{ si } a<0\end{array}\right.\end{array}\right.$$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a\ (a\neq 0)\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0\end{array}\right\}$ entonces $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{a}{0}$ .Diremos que la función presenta para $x=x_o$ una discontinuidad de salto infinito. La recta $x=x_o$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función. Siempre tendremos que estudiar los límites laterales para determinar como son las asíntotas verticales (convergentes o divergentes)

Las situaciones que se pueden dar en los límites laterales son:

$$\frac{a}{0^+}=\left\{\begin{array}{l}+\infty\text{ si } a>0\\ -\infty\text{ si } a>0\end{array}\right.$$
$$\frac{a}{0^-}=\left\{\begin{array}{l}-\infty\text{ si } a>0\\ +\infty\text{ si } a>0\end{array}\right.$$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0\end{array}\right\}$entonces $\boxed{\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}=\dfrac{0}{0}}$ es una indeterminación

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0^+\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty\end{array}\right\}$entonces $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0^+$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0^-\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty\end{array}\right\}$entonces $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0^-$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0^-\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=-\infty\end{array}\right\}$entonces $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0^+$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0^+\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=-\infty\end{array}\right\}$entonces $\lim\limits_{x\to x_o}\dfrac{f(x)}{g(x)}=0^-$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty(\text{ o } -\infty)\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 0\end{array}\right\}$entonces $\boxed{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)g(x) = 0\cdot(+\infty)}$es una indeterminación

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty(\text{ o } -\infty)\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 0\end{array}\right\}$entonces $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{+\infty}{0}$ .Diremos que la función presenta para $x = x_o$ una discontinuidad de salto infinito.
La recta $x = x_o$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función. Siempre tendremos que estudiar los límites laterales para determinar cómo son las asintotas verticales (convergentes, divergentes)

Las situaciones que se pueden dar en los límites laterales son:

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$
$$\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o}(f(x)+g(x)) = +\infty\\ \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}(f(x)-g(x))=+\infty-(+\infty)} \text{ es indeterminación}\\ \lim\limits_{x\to x_o}(f(x)\cdot g(x)) = +\infty\\ \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{+\infty}{+\infty}} \text{ es indeterminación}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o}(f(x)-g(x)) = -\infty\\ \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}(f(x)+g(x))=-\infty+\infty)} \text{ es indeterminación}\\ \lim\limits_{x\to x_o}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty\\ \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{-\infty}{+\infty}} \text{ es indeterminación}\end{array}\right.$$

Las únicas situaciones en las que no podemos afirmar el valor del límite, son las indeterminaciones siguientes: $\dfrac{0}{0}, 0\cdot\infty, \dfrac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 1^\infty, 0^0$ *y* ∞^0

El objetivo de estos apuntes es saber como eliminar esas indeterminaciones y calcular el correspondiente límite

Theorem 19 *(Funciones que coinciden en todos sus puntos menos en uno)*
Sea x_0 un número real y sean f y g dos funciones que coinciden en todos los puntos de un entorno de x_0, salvo quizás en x_0. Entonces, si existe el limite de una de ellas en x_0, también existe el límite de la otra y además son iguales

$$\left.\begin{array}{l}f(x) = g(x) \text{ para todo } x \in E^*_\delta(x_0)\\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ (o \lim\limits_{x\to x_0} g(x))\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x)$$

Proof. [Demostración] Supongamos que existe el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = l$. Entonces, por la definición, se tiene que para cada $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ (depende de ε) tal que:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \in & E_\varepsilon(l) \text{ siempre que } x \in E^*_\delta(x_0)\\ & \Updownarrow & \\ |f(x)-l| & < & \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x-x_0| < \delta\end{array}$$

Ahora bien, como $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in E_\delta^*(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\sim \{x_0\}$.

Entonces resulta que:

$$\begin{array}{rcl} g(x) & \in & E_\varepsilon(l) \text{ siempre que } x \in E_\delta^*(x_0) \\ & \Updownarrow & \\ |g(x) - l| & < & \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - x_0| < \delta \end{array}$$

Por lo tanto; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$ ■

Utilizando el teorema anterior vamos a explicar algunas técnicas de cálculo de límites.

2.4 Técnicas de cálculo de límites

2.4.1 *a) Técnicas de cancelación*

Se aplica en las funciones racionales cuando nos encontramos con una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$

Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y supongamos que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \dfrac{0}{0}$

Al ser $\left.\begin{array}{l} P(x_0) = 0 \Longleftrightarrow P(x) = (x - x_0) \cdot P_1(x) \\ Q(x_0) = 0 \Longleftrightarrow Q(x) = (x - x_0) \cdot Q_1(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow$ Por el teorema anterior, podemos cancelar el factor $(x - x_0)$ en el numerador y denominador y aplicar la sustitución directa. Pudiendose presentar las siguientes posibilidades

- Si $Q_1(x_0) \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \cdot P_1(x)}{(x - x_0) \cdot Q_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}$$

Fíjate, que para $x = x_0$ la función f presenta una discontinuidad evitable; ya que no existe $f(x_0)$ y sin embargo si que $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. La gráfica de la función $y = f(x)$ coincide con la de la función $y = \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ si a ésta le quitamos el punto $P(x_0, \dfrac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)})$.

- Si $P_1(x_0) \neq 0$ y $Q_1(x_0) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \cdot P_1(x)}{(x - x_0) \cdot Q_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(x_0)}{0}$$

Procederemos a estudiar los límites laterales; ya que la recta $x = x_0$ *es una asíntota vertical* y siempre nos interesa conocer el comportamiento de la función en un entorno reducido de centro x_0 y radio tan pequeño como deseemos.

En esta situación, diremos que la función f *presenta en* x_0 *una discontinuidad de salto infinito*

- Si $P_1(x_0) = 0$ y $Q_1(x_0) = 0$

Volveremos a factorizar y cancelar, pudiéndose dar cualquiera de las dos situaciones anteriores

Example 20 *Calcula* $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}$ *y* $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}$

Sea $f(x)=\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}$ como $2x^2+3x+1=(x+1)(2x+1)$ entonces su dominio de definición (y de continuidad) es:

$$D(f)=\Re\sim\left\{-\frac{1}{2},-1\right\}$$

1) $\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}=\dfrac{0}{0}$

$\lim_{x\to -1}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}=\lim_{x\to -1}\dfrac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(2x+1)}=\lim_{x\to -1}\dfrac{(x+2)}{(2x+1)}=-1$

La función presenta para $x=-1$ una discontinuidad evitable. La gráfica de la función $y=f(x)$ coincide con la de la función $y=\dfrac{(x+2)}{(2x+1)}$ si le quitamos a ésta el punto de coordenadas $P(-1,-1)$.

2) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}}\dfrac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}=\dfrac{\frac{1}{4}-\frac{3}{2}+2}{0}=\dfrac{\frac{3}{4}}{0}$

Sabemos que la función presenta para $x=-\dfrac{1}{2}$ una discontinuidad de salto infinito. Además la recta $x=-\dfrac{1}{2}$ es una asíntota vertical.

Nos interesa estudiar el comportamiento de la función en un entorno reducido de $-\dfrac{1}{2}$. Para lo cual, tendremos que estudiar sus límites laterales.

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}=\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+}\frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(2x+1)}=\frac{\frac{3}{4}}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\frac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}=\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-}\frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(2x+1)}=\frac{\frac{3}{4}}{0^-}=-\infty$$

Example 21 *Calcula* $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$, $\lim_{x\to -3}\dfrac{x-3}{x^2-9}$, $\lim_{x\to 2}\dfrac{x-3}{x^2-9}$

Sea $f(x)=\dfrac{x-3}{x^2-9}$ como $x^2-9=(x-3)(x+3)$ entonces su dominio de definición (y de continuidad) es:

$$D(f)=\Re\sim\{-3,3\}$$

1) $\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\dfrac{0}{0}$

$\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{x^2-9}=\lim_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)(x+3)}=\lim_{x\to 3}\dfrac{1}{x+3}=\dfrac{1}{6}$

La función presenta para $x=3$ una discontinuidad evitable. La gráfica de la función $y=f(x)$ coincide con la de la función $y=\dfrac{1}{x+3}$ si le quitamos a ésta el punto de coordenadas $P(3,\dfrac{1}{6})$.

2) $\lim_{x\to -3} \dfrac{x-3}{x^2-9} = \dfrac{-6}{0}$

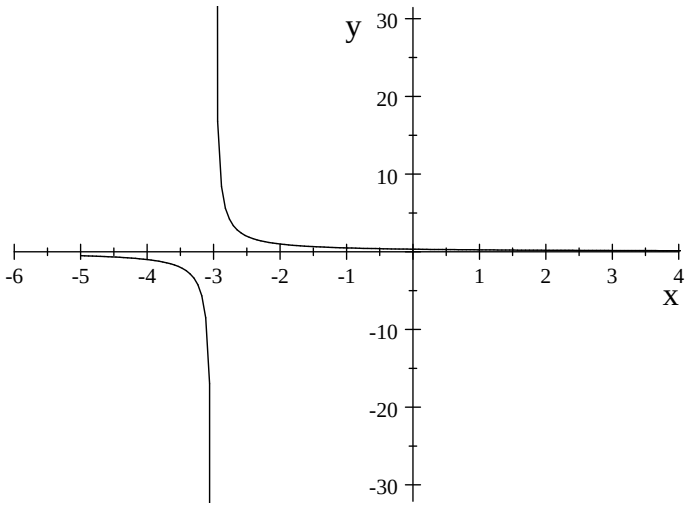
Sabemos que la función presenta para $x = -3$ una discontinuidad de salto infinito. Además la recta $x = -3$ es una asíntota vertical.

Como nos interesa estudiar el comportamiento de la función en un entorno reducido de -3. Tendremos que estudiar sus límites laterales.

$$\lim_{x\to(-3)^+} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to(-3)^+} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{-6}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x\to(-3)^-} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to(-3)^+} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{-6}{0^-} = +\infty$$

Mira ahora su gráfica



3) $\lim_{x\to 2} \dfrac{x-3}{x^2-9} = \dfrac{1}{5}$

2.4.2 *b) Técnicas de racionalización*

Se aplica en las funciones irracionales cuando nos encontramos con una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$ o del tipo $\infty - \infty$.

En el caso de que aparezcan raíces cuadradas, multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado.

En el caso de que aparezcan raíces de índice distinto de 2, utilizaremos la relación: $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + ... + AB^{n-2} + B^{n-1})$ que nos permite expresar $A - B$ de la siguiente manera:

$$A - B = \frac{A^n - B^n}{A^{n-1} + A^{n-2}B + ... + AB^{n-2} + B^{n-1}}$$

Ejemplos: $\sqrt[5]{x} - 2 = \dfrac{x-32}{\sqrt[5]{x^4} + 2\sqrt[5]{x^3} + 4\sqrt[5]{x^2} + 8\sqrt[5]{x} + 16}$

$\sqrt[4]{x} - 3 = \dfrac{x-81}{\sqrt[4]{x^3} + 3\sqrt[4]{x^2} + 9\sqrt[4]{x} + 27}$

$\sqrt[3]{x} - 1 = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} + 1}$

Example 22 *Calcula* $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$, $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

Dada la función $y=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ su dominio de definición (o de continuidad) es:

$D(f)=\{x\in\Re/x+1\geq 0yx-3\neq 0\}=[-1,3)\cup(3,+\infty)$

1) $\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 3}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$

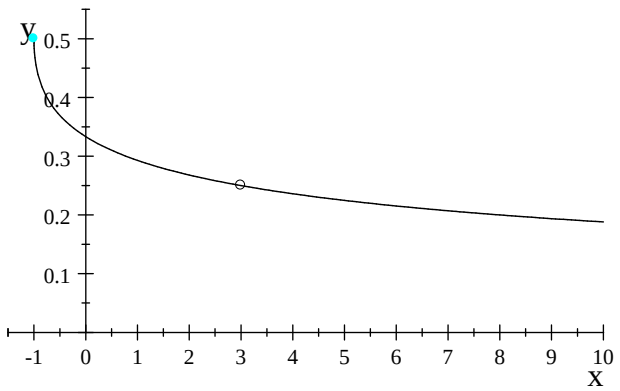
Al sustituir nos vuelve a salir $\frac{0}{0}$ pero podemos utilizar la técnica de la cancelación y por lo tanto:

$\lim_{x\to 3}\frac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim_{x\to 3}\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\frac{1}{4}$

La función presenta para $x=3$ una discontinuidad evitable. La gráfica de la función $y=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ coincide con la de la función $y=\frac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$ si le quitamos a ésta el punto de coordenadas $P(3,\frac{1}{4})$.

2) $\lim_{x\to(-1)^+}\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\frac{1}{2}$

Mira la gráfica de la función $y=\frac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$



Example 23 *Calcula* $\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

Dada la función $y=\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:

$D(f)=\Re\sim\{8\}$

$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = {}^{1}\lim_{x\to 8}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4} = \tfrac{1}{4+4+4} = \tfrac{1}{12}$$

Example 24 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = \frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1} = {}^{2}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

Cancelando el factor $x-1$ tendremos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} = \lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)} = \frac{1}{3}$$

Example 25 $\lim\limits_{x\to 32}\dfrac{\sqrt[5]{x}-2}{x-32}$

$$\lim_{x\to 32}\frac{\sqrt[5]{x}-2}{x-32} = \frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 32}\frac{\sqrt[5]{x}-2}{x-32} = {}^{3}\lim_{x\to 1}\frac{x-32}{(x-32)\left(\sqrt[5]{x^4}+2\sqrt[5]{x^3}+4\sqrt[5]{x^2}+8\sqrt[5]{x}+16\right)}$$

Cancelando el factor $x-32$ tendremos

$$\lim_{x\to 32}\frac{1}{\left(\sqrt[5]{x^4}+2\sqrt[5]{x^3}+4\sqrt[5]{x^2}+8\sqrt[5]{x}+16\right)} = \frac{1}{80}$$

Example 26 *Calcula tú el siguiente* $\lim\limits_{x\to 2^n}\dfrac{\sqrt[n]{x}-2}{x-2^n}$ *y comprueba que da* $\dfrac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$

Example 27 $\lim\limits_{x\to 4}\left(\dfrac{\sqrt{5x-4}-4}{\sqrt{x+5}-3}\right)$

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{5x-4}-4}{\sqrt{x+5}-3}\right) = \frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 4}\left(\tfrac{\sqrt{5x-4}-4}{\sqrt{x+5}-3}\right) = \lim_{x\to 4}\tfrac{\left(\sqrt{5x-4}-4\right)\left(\sqrt{5x-4}+4\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)\left(\sqrt{5x-4}+4\right)} =$$
$$\lim_{x\to 4}\tfrac{(5x-20)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{5x-4}+4\right)} = {}^{6}\lim_{x\to 4}\tfrac{5\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{5x-4}+4\right)} = \frac{5\cdot 6}{8} = \frac{15}{4}$$

---

[1] Nota: Como $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+.....+AB^{n-2}+B^{n-1})$ entonces:

$$A-B = \frac{A^n-B^n}{A^{n-1}+A^{n-2}B+.....+AB^{n-2}+B^{n-1}}$$

En particular , la expresión $\sqrt[3]{x}-2 = \dfrac{(x-8)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}$

Con lo que, la función quedará así:

$$y = \frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8} = \frac{(x-8)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}\cdot\frac{1}{(x-8)} = \frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4} \text{ siendo } x\neq 8$$

[2] $\sqrt[3]{x}-1 = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$

[3] $\sqrt[5]{x}-2 = \dfrac{x-32}{\sqrt[5]{x^4}+2\sqrt[5]{x^3}+4\sqrt[5]{x^2}+8\sqrt[5]{x}+16}$

2.4.3 *b) Técnicas de cálculo*

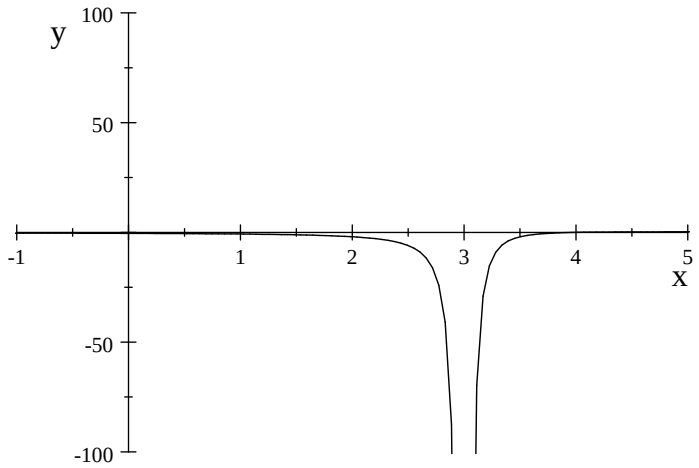
Es útil cuando tengamos resta o productos de funciones

Example 28 *Calcula* $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{x-3}}-\frac{1}{\sqrt{(x-3)^3}}\right)$

Dada la función $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{\sqrt{(x-3)^3}}$
Su dominio de definición (o de continuidad) es:
$D(f)=(3,+\infty)$
Fíjate que $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{\sqrt{(x-3)^3}}=\frac{x-4}{\left(\sqrt{(x-3)}\right)^3}$
$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{x-3}}-\frac{1}{\sqrt{(x-3)^3}}\right)=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x-4}{\left(\sqrt{(x-3)}\right)^3}\right)=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$

Example 29 *Calcula* $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{(x-3)^2}\right)$

Dada la función $y=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{(x-3)^2}$
Su dominio de definición (o de continuidad) es:
$D(f)=\Re\sim\{3\}$
Fíjate que $y=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{(x-3)^2}=\frac{x-4}{(x-3)^2}$
$\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{(x-3)^2}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{(x-3)^2}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$
La recta $x=3$ es una asintota vertical de ramas convergentes



Example 30 *Calcula* $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{(x-3)^3}\right)$

Dada la función $y = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^3}$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:

$D(f) = \Re \sim \{3\}$

$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^3}\right) =$ [7] $\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^3} = \dfrac{1}{0}$

La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. La función $y = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^3}$ presenta para $x = 3$ una discontinuidad de salto infinito

Calculemos los límites laterales

$\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^3}\right) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$

$\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\frac{x^2-6x+8}{(x-3)^3}\right) = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$

La recta $x = 3$ es una asíntota vertical de ramas divergentes

Example 31 *Calcula* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{3}{(x-1)^2} - 1\right)$

Dada la función $y = \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{3}{(x-1)^2} - 1\right)$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:

$D(f) = \Re \sim \{1\}$

Si calculamos por separado cada límite tendremos:

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1} = \dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}$ [8] $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{(x-1)^2} - 1\right) = \dfrac{3}{0^+} - 1 = +\infty - 1 = +\infty$

Con lo cual, el límite $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{3}{(x-1)^2} - 1\right)$ presenta la indeterminación $0\cdot\infty$

Para eliminarla y que nos aparezca la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ tendremos que calcular la expresión contenida en el límite:

$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{3}{(x-1)^2} - 1\right) =$ [9] $\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\left(\dfrac{3-(x-1)^2}{(x-1)^2}\right) =$

$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\left(\dfrac{3-(x-1)^2}{(x-1)^2}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(-x^2+2x+2\right)}{(x-1)} = \dfrac{3}{0}$

La recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función. La función presenta en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito.

---

[7] Fíjate que $y = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^3} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^3}$

[8] $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$

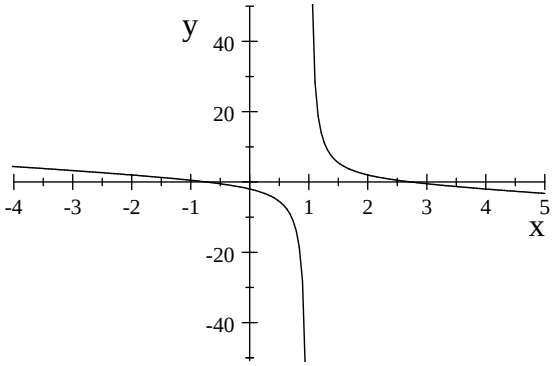
[9] Fíjate que $y = \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{3}{(x-1)^2} - 1\right) = \dfrac{\left(-x^2+2x+2\right)}{(x-1)}$

Si calculamos ahora los límites laterales, podremos determinar si es una asíntota de ramas convergentes o divergentes

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\frac{3}{(x-1)^2}-1\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(-x^2+2x+2\right)}{(x-1)}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\frac{3}{(x-1)^2}-1\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(-x^2+2x+2\right)}{(x-1)}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical de ramas divergentes



Example 32 *Calcula* $\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x-4}}-\frac{x+3}{\sqrt{2x-8}}\right)$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:

$D(f)=\{x\in\Re/x>4\}=(4,+\infty)$

Si calculamos por separado cada límite tendremos:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 4^+}\frac{1}{\sqrt{x-4}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 4^+}\frac{x+3}{\sqrt{2x-8}}=\frac{7}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}\to\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x-4}}-\frac{x+3}{\sqrt{2x-8}}\right)=\infty-\infty$$

Para eliminar la indeterminación, reduciremos a común denominador la función.

$$\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x-4}}-\frac{x+3}{\sqrt{2x-8}}\right)=^{10}\lim_{x\to 4^+}\frac{\left(2-\sqrt{2}(x+3)\right)}{2\sqrt{(x-4)}}=\frac{2-7\sqrt{2}}{0^+}=-\infty$$

Example 33 $\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}-3}-\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right)$

Dada la función $y=\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}-3}-\frac{1}{\sqrt{x}-2}$ su dominio de definición o continuidad es:

$D(f)=[0,4)\cup(4,+\infty)$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}-3}-\frac{1}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1-\sqrt{(x+5)}}{\left(\sqrt{(x+5)}-3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)}=\frac{0}{0}$$

---

[10] Fíjate que $y=\left(\frac{1}{\sqrt{x-4}}-\frac{x+3}{\sqrt{2x-8}}\right)$ coincide con $y=\frac{\left(2-\sqrt{2}(x+3)\right)}{2\sqrt{(x-4)}}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(x-1-\sqrt{(x+5)}\right)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{\left(\sqrt{(x+5)}-3\right)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}+2\right)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)}=:$$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(x^2-3x-4\right)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)^2\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)}=^{11}\lim_{x\to 4}\frac{(x+1)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)}=\frac{120}{0}$$

La recta $x=4$ es una asíntota vertical. La función $y=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}-3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ presenta para $x=4$ una discontinuidad de salto infinito.

Calculemos los límites laterales

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{(x+1)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)}=\frac{120}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{(x+1)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)\left(\sqrt{x}+2\right)}{(x-4)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)}=\frac{120}{0^-}=-\infty$$

La recta $x=4$ es una asíntota vertical de ramas divergentes.

2.4.4 Ejercicios de límites de una función en un punto

Exercise 2.4.1 $\lim_{x\to 2}\dfrac{x^2+7}{x^2-3}$

$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7}{x^2-3}=11$$

Exercise 2.4.2 $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^4+2x^3-x-2}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4+2x^3-x-2}=\frac{0}{0}$$

Como $\left.\begin{array}{l} x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right)\\ x^4+2x^3-x-2=(x+2)(x-1)\left(x^2+x+1\right)\end{array}\right\}$ entonces

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4+2x^3-x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{3}$$

Exercise 2.4.3 $\lim_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}=\dfrac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+....+a^{n-2}x+a^{n-1})}{x-a}=$$
$$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+....+a^{n-2}x+a^{n-1})=n\cdot a^{n-1}$$

Exercise 2.4.4 $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=^{12}\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1)\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}++...+(1+x)^1+1\right)}{x}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}++...+(1+x)^1+1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}++...+(1+x)^1+1\right)=$$
$$=n$$

Exercise 2.4.5 $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^m-1}=\dfrac{0}{0}$

---

[11] $\dfrac{\left(x^2-3x-4\right)}{(x-4)^2}=\frac{x+1}{x-4}$

[12] $A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+.....+AB^{n-2}+B^{n-1})$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^m-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+.....x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^{m-1}+x^{m-2}+.....+x^2+x+1)}=$$
$$\frac{1}{m}$$

Exercise 2.4.6 $\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+.....x^2+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+.....x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{m-1}+x^{m-2}+.....x^2+x+1)}{(x^{n-1}+x^{n-2}+.....x^2+x+1)}=$$
$$\frac{m}{n}$$

Exercise 2.4.7 $\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}=^{13}\lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)}=$$
$$=\lim_{x\to a}\frac{(x-1)}{(x^2+ax+a^2)}=\frac{a-1}{3a^2}$$

Exercise 2.4.8 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\infty-\infty$

Como $(1-x^3)=(1-x)(1+x+x^2)$ entonces:
$$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}=\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}=\frac{(-x-2)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)}$$
$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)=\lim_{x\to 1}\frac{(-x-2)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)}=\lim_{x\to 1}\frac{(-x-2)}{(1+x+x^2)}=-1$$

Exercise 2.4.9 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^3}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}=$$
$$=\lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)}=$$
$$\frac{2}{3}$$

Exercise 2.4.10 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

Exercise 2.4.11 $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

Exercise 2.4.12 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a+x}}$

Exercise 2.4.13 $\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$$

---

[13] $x^2-(a+1)x+a=x^2-xa-x+a=x(x-a)-(x-a)=(x-1)(x-a)$
$x^3-a^2=(x-a)(x^2+ax+a^2)$

2.5 Teoremas para calcular límites:

2.5.1 Función convergente a cero por función acotada en un punto

Theorem 34 *Si* $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$ *y* g *es una función acotada en un entorno reducido de centro* x_o *y radio tan pequeño como queramos. Entonces, se verifica que* $\lim_{x\to x_o} (f(x)\cdot g(x)) = 0$ *aunque* $g(x_o)$ *no exista.*

Si g está acotada en $(x_o-\delta_1, x_o-\delta_1)\sim\{x_o\} \Leftrightarrow \exists k>0$ tal que $|g(x)|<k$ siempre que $0<|x-x_o|<\delta_1$

Como $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0 \Longrightarrow$Para cada $\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ tal que $|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{k}$siempre que $0<|x-x_o|<\delta$

Dado $\varepsilon>0$ $\exists\delta_2=\min\{\delta,\delta_1\}>0$ tal que $\left\{\begin{array}{l} |f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{k} \\ y \\ |g(x)|<k \end{array}\right\}$ siempre que $0<|x-x_o|<\delta_2$.

Con lo que:

Dado cualquier $\varepsilon>0$ $\exists\delta_2>0$ / $|f(x)g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{k}|g(x)|<\varepsilon$ *siempre que* $0<|x-x_o|<\delta_2$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}(f(x)\cdot g(x)) = 0$

Example 35 *Calcula* $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Sea $h(x) = x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ Su dominio de definición (o de continuidad) es $D(h) = \Re\sim\{0\}$

Como $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \\ \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq 1\ \forall x\in\Re\sim\{0\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Example 36 *Calcula* $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Sea $h(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Su dominio de definición (o de continuidad) es $D(h) = \Re\sim\{0\}$

Como $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to 0} x = 0 \\ \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq 1\ \forall x\in\Re\sim\{0\} \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

Otros límites se pueden resolver utilizando el criterio del emparedado, que a continuación se explica:

2.5.2 *Criterio del emparedado*

Theorem 37

Hipótesis: a)Sean f, g y h tres funciones definidas en un intervalo abierto I y sea $x_o\in I$ de tal manera que $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)\ \forall x\in I\wedge x\neq x_o$.
b) Si $\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} h(x) = l$
Tesis: $\lim_{x\to x_o} g(x) = l$

Demostración:
Para todo $x \neq x_o \wedge x \in I$, se tiene que
$|g(x) - l| = |g(x) - f(x) - (l - f(x))| \leqslant |g(x) - f(x)| + |f(x) - l|$
$\leqslant |h(x) - f(x)| + |f(x) - l|$ pues $|g(x) - f(x)| \leqslant |h(x) - f(x)|$hipótesis a
$\leqslant |h(x) - l - (f(x) - l)| + |f(x) - l|$
$\leqslant |h(x) - l| + 2\,|f(x) - l|$ (1)
Sea $\varepsilon > 0$, por ser $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l$, $\exists \delta_{1>o}$ tal que si :

$$0 < |x - x_o| < \delta_1 \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (*)$$

por ser $\lim\limits_{x \to x_o} h(x) = l$, $\exists \delta_{2>o}$ tal que si :

$$0 < |x - x_o| < \delta_2 \text{ entonces } |h(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

luego, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si $0 < |x - x_o| < \delta$ entonces de (1) tendremos que:

$$|g(x) - l| \leqslant |h(x) - l| + 2\,|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

de donde:

$$\lim_{x \to x_o} g(x) = l$$

Example 38 *Demuestra que* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Demostración:
Si $x > 0 \to 0 < \sin x < x < \tan x \to \dfrac{1}{\tan x} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sin x}$
Multiplicando esta desigualdad por $sinx$ ($sinx > 0$) tendremos:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\sin x}{\tan x} & < & \dfrac{\sin x}{x} < 1 \\ & \Updownarrow & \\ \dfrac{1}{\cos x} & < & \dfrac{\sin x}{x} < 1 \end{array}$$

Si $x < 0 \to \tan x < x < \sin x \to \dfrac{1}{\sin x} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\tan x}$
Multiplicando esta desigualdad por $sinx$ ($sinx < 0$) tendremos:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\sin x}{\tan x} & < & \dfrac{\sin x}{x} < 1 \\ & \Updownarrow & \\ \dfrac{1}{\cos x} & < & \dfrac{\sin x}{x} < 1 \end{array}$$

En definitiva; hemos comprobado que en un entorno abierto y reducido del cero, la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ verifica que $g(x) < f(x) < h(x)$ siendo $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ y $h(x) = 1$

Como además $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ y $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$; entonces podemos afirmar que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Example 39 *Demuestra que* $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Demostración:
Si $x > 0 \to 0 < \sin x < x < \tan x \to \frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$
Multiplicando esta desigualdad por $\tan x$ ($\tan x > 0$) tendremos:

$$\begin{array}{rcl} 1 & < & \frac{\tan x}{x} < \frac{\tan x}{\sin x} \\ & \Updownarrow & \\ 1 & < & \frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos x} \end{array}$$

Si $x < 0 \to \tan x < x < \sin x \to \frac{1}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\tan x}$
Multiplicando esta desigualdad por $\tan x$ ($\tan x < 0$) tendremos:

$$\begin{array}{rcl} 1 & < & \frac{\tan x}{x} < \frac{\tan x}{\sin x} \\ & \Updownarrow & \\ 1 & < & \frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos x} \end{array}$$

En definitiva; hemos comprobado que en un entorno abierto y reducido del cero, la función $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ verifica que $g(x) < f(x) < h(x)$ siendo $g(x) = 1$ y $h(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Como además $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$; entonces podemos afirmar que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

2.6 Infinitésimos

Definition 40 *Una función, f, se dice que es un infinitésimo en un punto x_o, si su límite en dicho punto es cero.*

$$f \text{ infinitésimo en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_o} f(x) = 0$$

Example 41 $f(x) = sinx$ *es un infinitésimo en* $x = 0$; *ya que* $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$
$f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ *es un infinitésimo en* $x = \frac{\pi}{4}$; *ya que* $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
$f(x) = 1 - \cos x$ *es un infinitésimo en* $x = 0$; *ya que* $\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) = 0$
$f(x) = 3^x - 1$ *es un infinitésimo en* $x = 0$; *ya que* $\lim_{x\to 0} (3^x - 1) = 0$

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$ *es un infinitésimo en* $x = 0$; *ya que* $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+x} - 1\right) = 0$
$f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{4}$ *es un infinitésimo en* $x = 1$; *ya que* $\lim_{x\to 1}\left(\arctan x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
$f(x) = x$ *es un infinitésimo en* $x = 0$; *ya que* $\lim_{x\to 0} x = 0$

Definition 42 *Dos infinitésimos* f *y* g,*en un mismo punto* x_o ,*se dice que son infinitésimos del mismo orden, cuando* $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$

Nota: La función $f(x) = x^n$ con $n \in N \sim \{0\}$ es un infinitésimo de orden n

Example 43 $f_1(x) = x^2$, $f_2(x) = -5x^2, f_3(x) = \frac{3}{2}x^2$*son infinitésimos, en* $x = 0$,*de orden 2*
$f_1(x) = x^3$, $f_2(x) = -5x^3, f_3(x) = \frac{3}{2}x^3$*son infinitésimos, en* $x = 0$, *de orden 3*

Definition 44 *Dos infinitésimos* f *y* g,*en un mismo punto* x_o ,*se dice que son infinitésimos equivalentes, cuando* $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1 \Longleftrightarrow f(x) \sim g(x)$$

Example 45 $f_1(x) = x$, $f_2(x) = \sin x$ *son infinitésimos equivalentes, en* $x = 0$ *ya que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$f_1(x) = x$, $f_2(x) = \tan x$ *son infinitésimos equivalentes, en* $x = 0$ *ya que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$$

Theorem 46 *Cuando, en un límite, un infinitésimo esté multiplicando o dividiendo se le puede sustituir por otro equivalente.*

Proof. Supongamos que, en x_0 $\quad f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$
Y supongamos que deseamos calcular un límite en el que aparece $f(x)$ multiplicando o dividiendo:

$$\lim_{x\to x_o} f(x)\cdot h(x) = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\cdot h(x) = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot \lim_{x\to x_o}(g(x)\cdot h(x)) = \lim_{x\to x_o}(g(x)\cdot h(x))$$

■

Esto es, hemos sustituido $f(x)$ *por* $g(x)$ y probablemente el nuevo límite sea más sencillo de calcular

Proposition 47 *La suma de varios infinitésimos de distinto orden se puede reducir al de menor orden*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2+x^3+x^7)f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)}{g(x)}$$

Ejemplo: Calcular $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{0}{0}$

Como $1-\cos x = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{3x^2}$

$\sin x \sim x$ cuando $x\to 0$

Entonces, $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right)\sim\dfrac{x}{2}$ cuando $x\to 0$

Con lo que:

$\lim_{x\to 0}\dfrac{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{6x^2}=\dfrac{1}{6}$

Otra manera de calcular este límite

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\dfrac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{3x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\left(1-\cos^2 x\right)}{3x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 x}{3x^2(1+\cos x)}=$ [14]

$=\lim_{x\to 0}\dfrac{x^2}{3x^2(1+\cos x)}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{3(1+\cos x)}=\dfrac{1}{3\cdot 2}=\dfrac{1}{6}$

Infinitésimos más frecuentes cuando $z\to 0$ Trigonométricos

$\sin z\sim z$ $\quad$ $\arcsin z\sim z$

$\tan z\sim z$ $\quad$ $\arctan z\sim z$

$1-\cos z\sim\dfrac{z^2}{2}$

Exponenciales, logarítmicos, potencias y raíces

$$\begin{aligned} z &\sim \ln(1+z)\\ e^z-1 &\sim z\\ a^z-1 &\sim z\ln a\\ \sqrt[n]{1+z}-1 &\sim \frac{1}{n}\cdot z\\ (1+z)^n-1 &\sim n\cdot z \end{aligned}$$

[14] $\sin x\sim x$ cuando $x\to 0$

Entonces, $\sin^2 x\sim x^2$ cuando $x\to 0$

Ejercicios de límites por infinitésimos

Exercise 2.6.1 $\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{5x^2}=\frac{0}{0}$

$\sin 3x \sim 3x$ cuando $x\to 0$. Por lo que:
$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{5x^2}=\frac{9}{5}$

Exercise 2.6.2 $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{7x^2}=\frac{0}{0}$

$1-\cos A=2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$
$1-\cos 5x=2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)$
$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{7x^2}$
$\sin 5x\sim 5x$ cuando $x\to 0$. Por lo que:
$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{5x}{2}\right)^2}{7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{25x^2}{14x^2}=\frac{25}{14}$

Exercise 2.6.3 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\frac{0}{0}$

Realizamos un cambio de variable
Si $x-1=z$;entonces $x=1+z$
Además $(x\to 1)\Leftrightarrow(z\to 0)$
Con lo que:

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+z}-2}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{2\left(\frac{\sqrt[3]{8+z}-2}{2}\right)}{z}=$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\left(\sqrt[3]{\frac{8+z}{8}}-1\right)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{z}{8}}-1\right)}{\frac{z}{2}}$$

$\sqrt[3]{1+\frac{z}{8}}-1\sim\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{8}$ cuando $z\to 0$. Con lo que:

$$\lim_{z\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{z}{8}}-1\right)}{\frac{z}{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{8}}{\frac{z}{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{12z}=\frac{1}{12}$$

Nota: Otra manera de calcular este límite sin utilizar infinitésimos.
$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^3-2^3}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}$
Utilizando el teorema de cancelación, tendremos:
$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4}=\frac{1}{12}$

Exercise 2.6.4 $\lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln(x-1)}{x-2}\right)=\frac{\ln 1}{0}=\frac{0}{0}$

Realizamos un cambio de variable
Si $x-2=z$;entonces $x=2+z$
Además $(x\to 2)\Leftrightarrow(z\to 0)$
Con lo que:
$\lim_{x\to 2}\left(\frac{\ln(x-1)}{x-2}\right)=\lim_{z\to 0}\left(\frac{\ln(1+z)}{z}\right)$
Como $z\sim\ln(1+z)$ cuando $z\to 0$, entonces:
$\lim_{z\to 0}\left(\frac{\ln(1+z)}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\frac{z}{z}=1$

Exercise 2.6.5 $\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\frac{0}{0}$
Como $x\ln 3\sim 3^x-1$ cuando $x\to 0$
$\lim_{x\to 0}\frac{3^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x\ln 3}{x}=\ln 3$

Exercise 2.6.6 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}$
Si $x-1=z$;entonces $x=1+z$
Además $(x\to 1)\Leftrightarrow(z\to 0)$
Con lo que:
$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+z}-1}{\sqrt{1+z}-1}$
$\sqrt[3]{1+z}-1\sim\frac{z}{3}$ y $\sqrt{1+z}-1\sim\frac{z}{2}$ cuando $z\to 0$
$\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+z}-1}{\sqrt{1+z}-1}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{z}{3}}{\frac{z}{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{2z}{3z}=\frac{2}{3}$

Exercise 2.6.7 $\lim_{x\to 2}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-1}{x-2}=\frac{0}{0}$
Si $x-2=z$;entonces $x=2+z$
Además $(x\to 2)\Leftrightarrow(z\to 0)$
Con lo que:
$\lim_{x\to 2}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-1}{x-2}=\lim_{z\to 0}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{z}-1}{z}$
Como $z\ln\left(\frac{1}{3}\right)\sim\left(\frac{1}{3}\right)^{x}-1$ cuando $z\to 0$. Entonces:
$\lim_{z\to 0}\frac{\left(\frac{1}{3}\right)^{z}-1}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{z\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{z}=\ln\left(\frac{1}{3}\right)=-\ln 3$

Exercise 2.6.8 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\frac{0}{0}$

Como $(1+x)^n-1\sim n\cdot x$ cuando $x\to 0$
$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{nx}{x}=n$

2.7 Límites en el infinito

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (*un número* real)

Definición $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x > K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x \in (k, +\infty) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ la recta $y = l$ es una asíntota horizontal de la función (por la derecha)

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ (*un número* real)

Definición $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\, \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x < -K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x \in (-\infty, -k) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ la recta $y = l$ es una asíntota horizontal de la función (por la izquierda)

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Definición $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x > K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} x > K \Rightarrow f(x) > M$

$\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x \in (k, +\infty) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (M, +\infty)$

d) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Definición $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x > K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) < -M$

$\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x \in (k, +\infty) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (-\infty, -M)$

e) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Definición $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x < -K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) > M$

$\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x \in (-\infty, -k) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (M, +\infty)$

f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Definición $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x < -K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow$ $f(x) < -M$

$\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0$ /si $\begin{bmatrix} x \in (-\infty, -k) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (-\infty, M)$

g) No existan $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ o $\lim_{x\to+\infty} f(x)$

Chapter 3

Continuidad

3.1 Definiciones

Definition 48 *Función continua a la izquierda de un punto*

Sea f una función definida en un intervalo I y sea $x_0 \in I$.Diremos que la función f es continua a la izquierda de x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Definition 49 *Función continua a la derecha de un punto*

Sea f una función definida en un intervalo I y sea $x_0 \in I$.Diremos que la función f es continua a la derecha de x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Definition 50 *Función continua en un punto*[1]

Sea f una función definida en un intervalo I y sea $x_0 \in I$.Diremos que la función f es continua en un punto x_0 si f lo es a la izquierda y a la derecha de x_0. Esto equivale a afirmar que se verifican las siguientes condiciones:
1) $x_0 \in D(f)$ $(\exists\ f(x_0))$
2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Definition 51 *Función continua en un punto (topológica)*

Decir que f es continua en x_0 es equivalente a las siguientes definiciones

[1] f es continua en $x_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$

Si $x = x_0 + h$ entonces decir que $x \to x_0 \Longleftrightarrow h \to 0$; por lo que otra definición equivalente sería:

f es continua en $x_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0$

1)$\forall \xi > 0 \; \exists \; \delta > 0 \diagup$ si $\begin{bmatrix} |x - x_0| < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix}$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \xi$
2)$\forall \xi > 0 \; \exists \; \delta > 0 \diagup$ si $x \in E_\delta(x_0) \cap D(f)$ entonces $f(x) \in E_\xi(f(x_0))$
3)$\forall \xi > 0 \; \exists \; \delta > 0 \diagup$ si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\cap D(f)$ entonces $f(x) \in]f(x_0) - \xi, f(x_0) + \xi[$

Definition 52 *Función continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$

f es continua en $[a, b]$ si f lo es en $]a, b[$ y; además lo es a la derecha de a y a la izquierda de b

Remark 1 *Función discontinua en un punto*

Es evidente que una función no será continua cuando fallen alguna de las tres condiciones dadas en la Definition 5. Según esto; vamos a clasificar las discontinuidades de una función en un punto

3.2 Discontinuidades

Definition 53 *Discontinuidad de primera especie (salto finito)*

Diremos que una función presenta para x_0 una discontinuidad de primera especie cuando se verifique
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ sea distinto del $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (independientemente de que exista o no $f(x_0)$)
También se dice que la función presenta una discontinuidad de salto finito en x_0.

Definition 54 *Discontinuidad evitable*

Diremos que una función presenta para x_0 una discontinuidad evitable en los siguientes casos:

1. $\exists f(x_0)$ y $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ pero no coinciden

2. No existe $f(x_0)$ y $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Se denominan así, porque asignando a $f(x_0)$ el valor del $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ la función ya sería continua en x_0

Definition 55 *Discontinuidad de segunda especie (salto infinito)*

Si al menos uno de los límites $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ no existe o es $\pm\infty$

3.3 Operaciones con funciones continuas

Theorem 56 *Si f y g son continuas en x_0 entonces:*

1. $\alpha f + \beta g$ es continua en x_0 $\forall \alpha, \beta \in R$ (cualquier c. lineal de funciones continuas es continua)
2. $f \cdot g$ es continua en x_0

Theorem 57 *Si f y g son continuas en x_0 y además $g(x_0)$ no es nula entonces $\frac{f}{g}$ es continua en x_0*

Theorem 58 *Si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$ entonces $g \circ f$ es continua en x_0*

3.4 Discontinuidad de algunas funciones

1. Las funciones polinómicas son continuas en R
2. Las funciones racionales (cociente de polinomios) son discontinuas en los puntos que no pertenecen a su dominio de definición (los que anulan el denominador)
3. Las funciones irracionales son discontinuas en los puntos que no pertenecen a su dominio
4. Las funciones de la forma $y = a^{f(x)}$ son continuas para aquellos valores que pertenezcan al $D(f)$
5. Las funciones de la forma $y = Ln\ f(x)$ son continuas en el conjunto $\{x \in R \ / \ f(x) > 0\}$
6. las funciones de la forma $y = \sin f(x)$ son continuas para aquellos valores que pertenezcan al $D(f)$
7. Las funciones de la forma $y = \tan f(x)$ son discontinuas en el siguiente conjunto

$$\left\{x \in D(f) \ / \ f(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ siendo } k \in Z\right\}$$

3.5 Propiedades de las funciones continuas en un punto

Theorem 59 *<u>Teorema del signo</u>. Si una función es continua en un punto x_0 y además $f(x_0)$ es no nula; entonces, siempre podremos encontrar un entorno abierto de centro x_0 y radio tan pequeño como queramos en el que la función tenga el mismo signo que $f(x_0)$*

<u>Demostración</u> Casos:

- $f(x_0) > 0$

Por ser f continua en x_0,sabemos que dado cualquier $\xi > 0$ (tan pequeño como queramos) siempre podemos encontrar un $\delta > 0$(que depende del ξ elegido) de tal manera que si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ entonces $f(x) \in]f(x_0) - \xi, f(x_0) + \xi[$

Al ser $f(x_0) > 0$, siempre podremos considerar el ξ de tal manera que $f(x_0) > \xi$, con lo que $\boxed{0 <} f(x_0) - \xi < \boxed{f(x)} < f(x_0) + \xi$

Así pues, queda demostrado que existe un entorno de centro x_0 y radio δ en el cual $f(x)$ es positiva (basta con considerar el ξ / $f(x_0) > \xi$)

- $f(x_0) < 0$

Demuéstralo tú como ejercicio

Theorem 60 *Relación entre continuidad y acotación (localmente). Si una función es continua en un punto x_0 entonces, siempre podremos encontrar un entorno abierto de centro x_0 y radio tan pequeño como queramos en el que la función esté acotada*

Demostación

Por ser f continua en x_0,sabemos que dado cualquier $\xi > 0$ (tan pequeño como queramos) siempre podemos encontrar un $\delta > 0$(que depende del ξ elegido) de tal manera que si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ entonces $f(x) \in]f(x_0) - \xi, f(x_0) + \xi[$

En particular, si consideramos $\xi = 1$, entonces

$$f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1 \text{ si } x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

Acabamos de demostrar que $f(x_0)+1$ es cota superior de f en $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ y que $f(x_0) - 1$ es cota inferior de f en $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Por lo tanto, f está acotada en $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

Theorem 61 *Si f es continua en x_0 y toma valores de distinto signo en todo entorno de x_0, entonces $f(x_0) = 0$*

Demuestra como ejercicio este teorema

3.6 Propiedades de las funciones continuas en un cerrado

Theorem 62 *de Bolzano*[2]

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos ($f(a) \cdot f(b) < 0$), entonces existe, al menos, un punto $x_0 \in]a, b[$ tal que $f(x_0) = 0$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si una función es continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos, entonces podemos garantizar la existencia de un punto de la gráfica (cuya abcisa pertenece al $]a, b[$), al menos, que corta al eje de las abcisas

Theorem 63 *de los valores intermedios (Teorema de Darboux)*

[2] Por su complejidad, no lo demostraremos

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a)$ es distinta de $f(b)$, entonces la función f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ al menos una vez en $]a,b[$

Demostración

Sea $k \in R$ tal que $f(a) < k < f(b)$.

Definimos la función $H(x) = f(x) - k$ que es continua en $[a,b]$ por ser combinación lineal de dos funciones continuas

Como $H(a) = f(a) - k < 0$ y $H(b) = f(b) - k > 0$, se puede aplicar el Teorema de Bolzano a la función H; por lo que podemos afirmar que existe, al menos, un $x_0 \in]a,b[$ tal que $H(x_0) = 0$. Esto es

$H(x_0) = f(x_0) - k = 0 \rightarrow \boxed{f(x_0) = k}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si una función es continua en $[a,b]$ y k es tal que $f(a) < k < f(b)$ (ó $f(b) < k < f(a)$) entonces podemos garantizar la existencia de un $x_0 \in]a,b[$ tal que $f(x_0) = k$ (su imagen coincide con k)

Theorem 64 *de acotación en* $[a,b]$ [3]

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f está acotada en $[a,b]$

Theorem 65 *de Weierstrass*

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$,entonces

1. $\exists\ x_0 \in [a,b]\ /\ f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b]$ (P($x_0, f(\ x_0)$) máximo absoluto de f en $[a,b]$)
2. $\exists\ x_1 \in [a,b]\ /\ f(x_1) \leq f(x)\ \forall x \in [a,b]$ (P($x_1, f(\ x_1)$) mínimo absoluto de f en $[a,b]$)

Demostración Como f es continua en $[a,b]$, entonces por el teorema anterior f está acotada en $[a,b]$

1. Casos:

- Sea $M = \sup\{f(x)/x \in [a,b]\}$[4]$\rightarrow f(x) \leq M\ ;\ \forall x \in [a,b]$

Supongamos que el máximo de f en $[a,b]$ no se alcanza en el susodicho intervalo, entonces se verificará $f(x) < M\ ;\ \forall x \in [a,b]$

Definimos la función

$H(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$; por definición $H(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$

Además H es continua en $[a,b]$ por ser división de funciones continuas (ya que el denominador no se anula). En virtud del teorema de acotación, podemos afirmar que H está acotada en $[a,b]$.

Si está acotada , lo estará superiormente y por consiguiente:

$\exists\ k \in R^+\ /\ H(x) < k \Longrightarrow \dfrac{1}{M - f(x)} < k \Longrightarrow f(x) < M - \dfrac{1}{k}$

[3] Por su complejidad, no lo demostraremos

[4] Existe por el axioma del supremo, que dice:

Todo subconjunto de números reales acotado superiormente tiene supremo (la más pequeña de las cotas superiores)

Luego $M - \dfrac{1}{k}$ es una cota superior de f en $[a,b]$ y además menor que M. Esto contradice la hipótesis de que M es el supremo

Así pues, lo que hemos supuesto es falso y por lo tanto podemos afirmar que $\exists\ x_0 \in [a,b]\ /\ f(x_0) = M \rightarrow$(P($x_0, f(\ x_0)$) máximo absoluto de f en $[a,b]$)

- Sea $m = \inf\{f(x)/x \in [a,b]\}$[5]$\rightarrow f(x) \geq m\ ;\ \forall x \in [a,b]$

Supongamos que el mínimo de f en $[a,b]$ no se alcanza en el susodicho intervalo, entonces se verificará $f(x) > m\ ;\ \forall x \in [a,b]$

Definimos la función

$H(x) = \dfrac{1}{m - f(x)}$; por definición $H(x) < 0\ \forall x \in [a,b]$

Además H es continua en $[a,b]$ por ser división de funciones continuas (ya que el denominador no se anula).En virtud del teorema de acotación, podemos afirmar que H está acotada en $[a,b]$.

Si está acotada , lo estará inferiormente y por consiguiente

$\exists\ k \in R^-\ /\ H(x) > k \Longrightarrow \dfrac{1}{m - f(x)} > k \Longrightarrow f(x) > m - \dfrac{1}{k}$

Luego $m - \dfrac{1}{k}$ es una cota inferior de f en $[a,b]$ y además mayor que m. Esto contradice la hipótesis de que m es el ínfimo.

Así pues, lo que hemos supuesto es falso y por lo tanto podemos afirmar que $\exists\ x_1 \in [a,b]\ /\ f(x_1) = m \rightarrow$(P($x_1, f(\ x_1)$) mínimo absoluto de f en $[a,b]$)

Remark 2 *Toda función continua f en $[a,b]$ tiene la propiedad siguiente:*

$\boxed{\text{" transforma intervalos cerrados en intervalos cerrados "}}$

$f([a,b]) = [m, M]$ donde $m = \min\{f(x)/x \in [a,b]\}$ y

$M = \max\{f(x)/x \in [a,b]\}$

Corollary 66 *Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$;m no coincide con M* [6] *y además $k \in R\ /\ m < k < M$, entonces podemos garantizar la existencia de, al menos, un $x_0 \in [a,b]$ tal que $f(x_0) = k$ (su imagen coincide con k)*

Este corollary se puede demostrar facilmente utilizando los teoremas de Darboux y Weierstrass. Demuéstralo

[5] Existe por el axioma del ínfimo, que dice:
Todo subconjunto de números reales acotado inferiormente tiene ínfimo (la más grande de las cotas inferiores)

[6] $m = \min\{f(x)/x \in [a,b]\}$ y $M = \max\{f(x)/x \in [a,b]\}$

3.7 Problemas continuidad

Exercise 3.7.1 *Halla el dominio de continuidad de la siguientes funciones:*

$$y = \frac{x+1}{x^2+1} \qquad y = \frac{2}{|x|-1}$$

$$y = \frac{2x-1}{2x^2-5x+2} \qquad y = \frac{2}{|x|^2-1}$$

$$y = \frac{x-1}{x^4-3x^3+6x+4} \qquad y = \frac{x}{\cos x}$$

$$y = \sqrt{2x^2-5x-2} \qquad y = \frac{x}{\ln x}$$

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} \qquad y = \frac{x^2}{1-\cos x}$$

Exercise 3.7.2 *Estudia la continuidad de las siguientes funciones*

$$f(x) = \frac{x}{senx} \qquad f(x) = \ln(\cos x)$$

$$f(x) = \frac{3}{1-\tan x} \qquad f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x-9}{x^2-5x+6} & \text{si } x \neq 3 \\ 3 & x = 3 \end{cases} \qquad f(x) = \tan(x^2-5x+4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|3x-9|}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 0 & x = 3 \end{cases} \qquad f(x) = x^2 E\left[x\right]$$

$$f(x) = xE\left[x^2\right]$$

Exercise 3.7.3 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si\ x < 1 \\ x-1 & si\ 1 \leq x < 3 \\ 1 & si\ x = 3 \\ x^2-7 & si\ x > 3 \end{cases}$ *. Halla sus tipos de discontinuidad indicando de qué tipo son*

Exercise 3.7.4 *Estudia la continuidad de la función* $f(x) = x - E(x)$

Exercise 3.7.5 *Estudia la continuidad de la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1} & si\ x \leq 0 \\ x^2+1 & si\ x > 0 \end{cases}$

Exercise 3.7.6 [7]*Estudia la continuidad de la función* $f(x) = \dfrac{x^3-\tan x}{x+\tan x}$ *en el intervalo* $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. *Redefine la función para que sea continua en ese intervalo*

[7]Este ejercicio lo podrás resolver cuando estudies L'Hopital

Exercise 3.7.7 *¿Cuáles de las siguientes funciones son continuas en el entorno de $x = 0$?*

a) $f(x) = 2^x$ *b)* $f(x) = \begin{cases} -x & si\ x \leq 0 \\ \ln x & si\ x > 0 \end{cases}$

Exercise 3.7.8 *Dada la función $f(x) = 3x - 2$ demuestra, utilizando la definición topológica, que es continua para $x = 2$*

Exercise 3.7.9 *Dada la función $f(x) = x^2 - 2x + 1$ demuestra, utilizando la definición topológica, que es continua para $x = 1$*

Exercise 3.7.10 *Dada la función $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$ determina los valores para los cuales es continua. Clasifica las discontinuidades*

Exercise 3.7.11 *Sea una función $f(x)$ continua para $x = a$ tal que $f(a) = 0$ y sea $g(x)$ una función que está acotada en un entorno reducido de a. Demuestra que si existe $g(a)$ entonces la función producto($f \cdot g$)[8] es continua para $x = a$*

Exercise 3.7.12 *Sea $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \leq 3 \\ 3x + 2 & si\ x > 3 \end{cases}$ Determinar si la función es continua, para $x = 3$, calculando sus límites laterales y su imagen*

Exercise 3.7.13 *Dada la función $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$, determina si es continua para $x = 3$ calculando $\lim\limits_{h \to 0} (f(3 + h) - f(3))$*

Exercise 3.7.14 *Sea* $f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & si\ x < -1 \\ \dfrac{1}{x} & si\ -1 \leq x < 0 \\ \dfrac{1}{x-3} & si\ x \geq 0 \end{cases}$

Determinar los valores para los cuales es continua. Clasifica las discontinuidades

Exercise 3.7.15 *Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{5x^3+3x^2}{kx^2} & si\ x\ no\ es\ cero \\ -3 & si\ x = 0 \end{cases}$ determina k para que la función sea continua para $x = 0$*

Exercise 3.7.16 *Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-7x^2+15x-9}{x^3-5x^2+3x+9} & si\ x < 3 \\ mx + 5 & si\ x \geq 3 \end{cases}$ determina m para que la función sea continua para $x = 3$*

Exercise 3.7.17 *Dada la función $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + mx - 1}$ Hallar m sabiendo que la función no es continua para $x = 1$. Después clasifica sus discontinuidades*

Exercise 3.7.18 *Hallar a y b de modo que la siguiente función $f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2 & para & x < 0 \\ sin(b + x) & para & 0 < x < \\ \dfrac{\pi}{x} & para & x > \pi \end{cases}$ sea continua*

[8] $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Exercise 3.7.19 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 0 \\ ax + b & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ *. Hallar a y b para que la función ssea continua*

Exercise 3.7.20 *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & si \quad 1 \leq x \end{cases}$ *. Determina los valores de a y b para que la función sea continua y* $f(2) = 3$

Exercise 3.7.21 *Calcula los valores que deben tener a y b para que* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{ax} & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad x = 0 \\ \dfrac{1 - \cos x}{bx^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$ *sea continua en* $\Re$

Exercise 3.7.22 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ *y el intervalo* $I =]-2, 1[$. *Halla* $f(I)$ *y* $f^{-1}(I)$

Exercise 3.7.23 *Dada la función* $f(x) = -x^2 - x + 6$ *y los intervalos* $I =]-2, 1[$ *y* $I = [-2, 1]$ *. Determina :*

$f(I)$ *y* $f(J)$, $f^{-1}(4)$ *y* $f(]0, 4[)$

Exercise 3.7.24 *Dada la ecuación* $0 = x^3 + x - 5$, *demuestra que existe al menos una solución real comprendida entre* 1 *y* 2.*Determínala con una cifra decimal exacta (Aplica el teorema de Bolzano a la función* $f(x) = x^3 + x - 1$ *en el intervalo*$[1, 2]$*; después divide este intervalo en diez partes iguales y...)*

Exercise 3.7.25 *Si* $f(x) = x^2 + 2x + 1$. *¿Existe un entorno de* $x = 3$ *en el que la función esté acotada por 15 y 17?*

Exercise 3.7.26 *Dada la ecuación* $0 = x^3 + x - 1$, *demuestra que existe una solución real comprendida entre* 0 *y* 1.*Determínala con una cifra decimal exacta (Aplica el teorema de Bolzano a la función* $f(x) = x^3 + x - 1$ *en el intervalo*$[0, 1]$*; después divide este intervalo en diez partes iguales y...)*

Exercise 3.7.27 *Dada la ecuación* $x^3 = x^2 + 1$,*demuestra que existe una solución, al menos, en el intervalo* $[1, 2]$.*Determínala con dos cifras decimales exactas (Aplica el teorema de Bolzano a la función* $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ *en el intervalo* $[1, 2]$;*después divide este intervalo en....)*

Exercise 3.7.28 *Demuestra que la ecuación* $\cos x = 2x - 1$ *tiene al menos una solución en* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercise 3.7.29 *Demuestra que la ecuación* $\cos x = x$ *tiene al menos una solución en* $[0, 1]$. *Determínala con dos cifras decimales exactas*

Exercise 3.7.30 *La función* $f(x) = x^2 + 2x - 1$ *¿toma todos los valores comprendidos entre 7 y 14?. ¿Y entre -4 y 3?. Indica en qué teoremas te basas*

Exercise 3.7.31 *Invéntate una función que sea continua en* $]0,1]$ *y que sin embargo no tenga máximo en ese intervalo. Contradice este ejemplo el teorema de Weierstrass*

Exercise 3.7.32 *Invéntate una función que sea continua en* $]a,b[$ *y que sin embargo no tenga máximo ni mínimo en ese intervalo. Contradice este ejemplo el teorema de Weierstrass*

Exercise 3.7.33 *Sean* f *y* g *dos funciones continuas en* $[a,b]$*, tales que* $f(a) > g(a)$ *y* $f(b) < g(b)$*.Demuestra que* $\exists c \in [a,b]/f(c) = g(c)$

Exercise 3.7.34 *Sea* f *una función continua en* $[0,1]$ *y* $0 \leq f(x) \leq 1$*. Demuestra que existe al menos un punto* $x_0 \in [0,1]$ *tal que* $f(x_0) = x_0$

Exercise 3.7.35 *Sea* f *una función continua en* $[0,1]$ *, tal que* $f(x)$ *es racional y* $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
Demuestra que la función f *es constante, siendo* $f(x) = \frac{1}{2}$ $\forall x \in [0,1]$

Exercise 3.7.36 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x<3 \\ 5 & x=3 \\ 2x+4 & x>3 \end{cases}$
Estudia su continuidad para $x = 3$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 3.7.37 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x<3 \\ 2x+4 & x>3 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 3$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo*

Exercise 3.7.38 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x \leq 3 \\ 2x+4 & x>3 \end{cases}$
Estudia su continuidad para $x = 3$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 3.7.39 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & x \neq 1 \\ 5 & x=1 \end{cases}$
Estudia su continuidad para $x = 1$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 3.7.40 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & x \neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$
Estudia su continuidad para $x = 1$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 3.7.41 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{2}{(x-2)^2}$
Estudia su continuidad para $x = 2$*. En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*
¿Existe alguna asíntota vertical?

Exercise 3.7.42 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$
Estudia su continuidad para $x = 2$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*
¿Existe alguna asíntota vertical?

Exercise 3.7.43 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x} & x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$
Estudia su continuidad para $x = 0$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*
¿Existe alguna asíntota vertical?

Exercise 3.7.44 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & x < 3 \\ \dfrac{-1}{x-3} & x > 3 \end{cases}$
Estudia su continuidad para $x = 3$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*
¿Existe alguna asíntota vertical?

Exercise 3.7.45 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 3 \\ 2x+1 & x > 3 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 3$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 3.7.46 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 3 \\ 5 & x = 3 \\ 2x+1 & x > 3 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 3$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 3.7.47 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x-5} & x < 5 \\ 3x+2 & x \geq 5 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 5$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 3.7.48 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-5} & x < 5 \\ 3x+2 & x \geq 5 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 5$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 3.7.49 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & x > 2 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 2$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 3.7.50 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ \dfrac{-1}{x-2} & x > 2 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 2$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 3.7.51 *De las funciones dadas estudia su continuidad. Clasifica sus discontinuidades*

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 3}$$
$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x}{x - 3}$$

Exercise 3.7.52 *De las siguientes funciones*
$f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 1}$
$f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$
$f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{9 - x^2}$
$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$
Estudia su dominio de definición, el dominio de continuidad, puntos de corte con los ejes de coordenadas y además $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ *y* $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. *Intenta dibujar la gráfica con la información obtenida*