Título: Límites de funciones y continuidad

Autor:© Juan José Isach Mayo

Fecha:04 Septiembre del 2007

Contents

Chapter 1

Límites

1.1 Conceptos previos

Definition 1 *Entorno abierto de centro x_o y radio r*

$$E_r(x_o) = \{x \in R \diagup d(x,x_o) < r\} = \{x \in R \diagup |x - x_o| < r\} =$$
$$\{x \in R \diagup -r < x - x_o < r\} = \{x \in R \diagup x_o - r < x < x_o + r\} =]x_o - r, x_o + r[$$

Definition 2 *Entorno abierto reducido de centro x_o y radio r*

$$E_r^*(x_o) = \{x \in R \diagup 0 < d(x,x_o) < r\} = \{x \in R \diagup 0 < |x - x_o| < r\} =$$
$$\{x \in R \sim \{x_o\} \diagup -r < x - x_o < r\ \} = \{x \in R \sim \{x_o\} \diagup x_o - r < x < x_o + r\}$$
$$=]x_o - r, x_o + r[\sim \{x_o\}$$

1.2 Límites de una función en un punto

Estudiar el límite de una función en un punto x_o es lo mismo que estudiar el comportamiento de dicha función en un entorno reducido de centro x_o y radio ,r, tan pequeño como deseemos ($E_r^*(x_o) =.]x_o - r, x_o + r[\sim \{x_o\}$)

Las situaciones que se pueden presentar son las siguientes:

1.2.1 a)Función convergente en x_0 (Puede o no ser continua en x_o)

Si $\exists \lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l$ (*un número* real) diremos que la función es *convergente* en x_o

Definition 3 $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ /si \begin{bmatrix} 0 < |x - x_o| < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ /si } \begin{bmatrix} x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \sim \{x_o\} \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

Condición necesaria y suficiente para que una función sea convergente en x_0

$$\lim_{x\to x_o} f(x) = l \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \exists \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) \\ \exists \lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) \\ \lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = l \end{pmatrix}$$

Nota 1: $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = l$ (*un número* real)

Definition 4 $\lim\limits_{x\to x_o^+} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ */si* $\begin{bmatrix} 0 < x - x_o < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ /si } \begin{bmatrix} x \in (x_o, x_o + \delta) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

Nota 2: $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = l$ (*un número* real)

Definition 5 $\lim\limits_{x\to x_o^-} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$ */si* $\begin{bmatrix} 0 < x_o - x < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow$ $|f(x) - l| < \varepsilon$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 \text{ /si } \begin{bmatrix} x \in (x_o - d, x_o) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$$

Ejemplos de funciones convergentes en x_0

Example 6 *Demuestra que* $\lim\limits_{x\to 2}(3x + 3) = 9$

Proof. Dado un $\varepsilon > 0$ ¿para qué δ se verifica que$|f(x) - 9| < \varepsilon$ siempre que $0 < |x - 2| < \delta$?

Fíjate que:

$$|3x + 3 - 9| < \varepsilon \Leftrightarrow |3(x - 2)| < \varepsilon \Leftrightarrow |x - 2| < \tfrac{\varepsilon}{3}$$

Por lo tanto; bastaría con escoger como δ el valor $\delta \leq \frac{\varepsilon}{3}$ ■

Observa que $\lim\limits_{x\to 2}(3x + 3) = 9 = f(2)$

Example 7 *Demuestra que dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x^2}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$ *se verifica que* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x - x^2}{x} = 1$

Proof. Dado un $\varepsilon > 0$ ¿para qué δ se verifica que$|f(x) - 1| < \varepsilon$ siempre que

$0 < |x| < \delta$?

Fíjate que

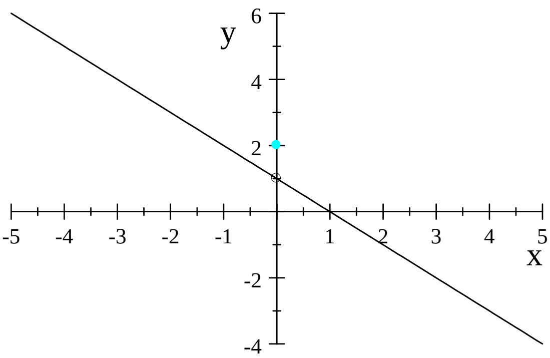
$$|f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{x - x^2}{x} - 1\right| < \varepsilon \Leftrightarrow \left|\frac{-x^2}{x}\right| < \varepsilon$$

Y como x ha de ser no nulo; entonces :$|f(x) - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow |x| < \varepsilon$

Por lo tanto; bastaría con escoger como δ el valor $\delta \leq \varepsilon$

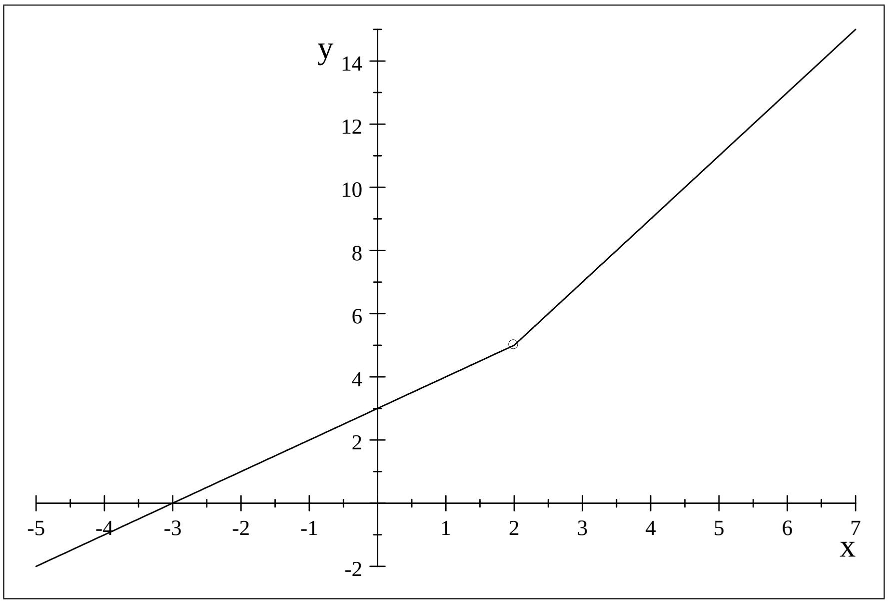
Luego, la función dada verifica que $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ *.Este límite no coincide con* $f(0) = 2$ ■

La gráfica de la función $f(x)$ coincide con la de la recta $g(x) = 1 - x$ si a esta última le quitamos el punto de coordenadas $(0, 1)$ y le añadimos el punto de coordenadas $(0, 2)$



Gráfica de $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x - x^2}{x} & x \neq 0 \\ 2 & x = 0 \end{cases}$

Example 8 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 3 + x & x < 2 \\ 2x + 1 & x > 2 \end{cases}$ comprueba que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$



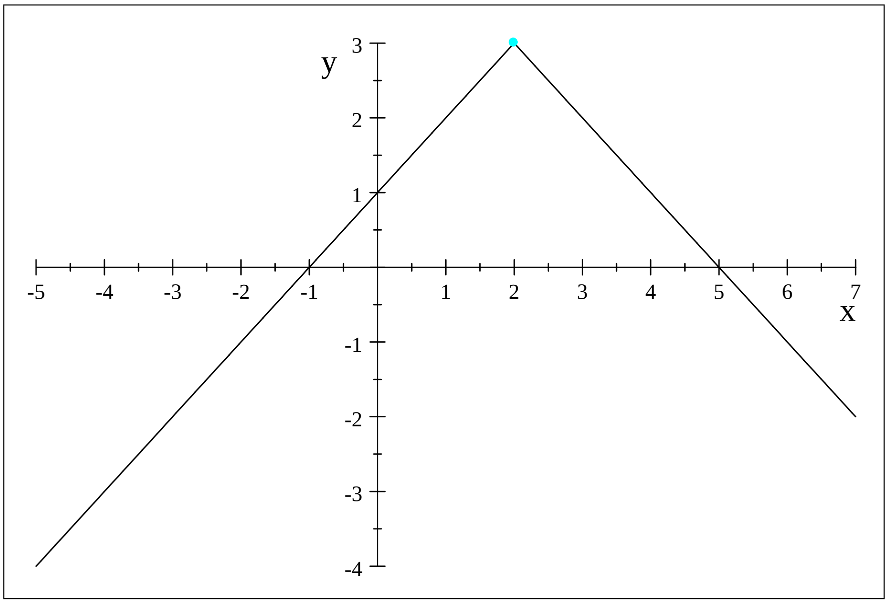
$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2x+1) = 5 \qquad \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3+x) = 5$

Es digno de resaltar, que existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$ y no existe $f(2)$

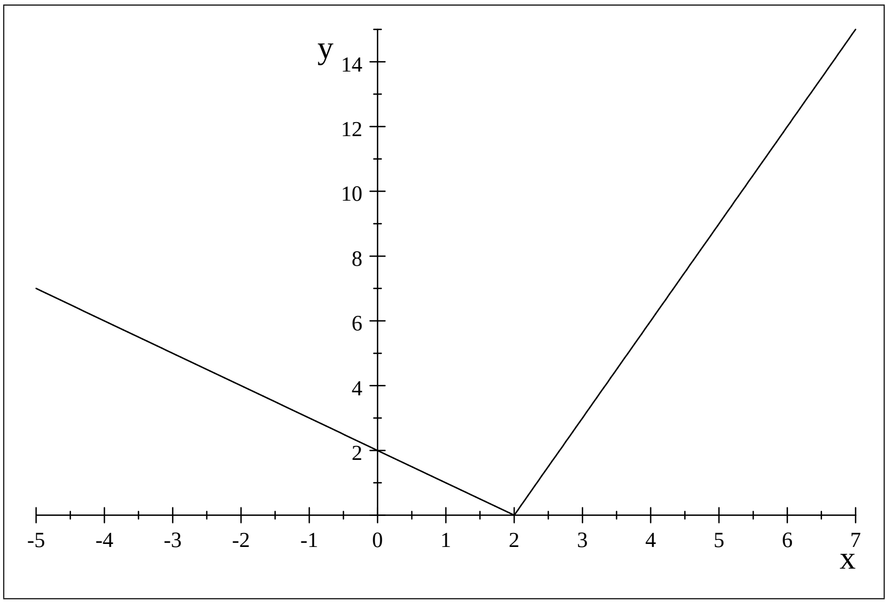
Example 9 Dada la función $f(x) = \begin{cases} x+1 & x \leq 2 \\ 3 & x = 2 \\ -x+5 & x > 2 \end{cases}$ comprueba que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5 = f(2)$

$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (x+1) = 3 \qquad \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (-x+5) = 3$

Es digno de resaltar, que existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 3$ y que $f(2) = 3$



Example 10 Dada la función $f(x) = \begin{cases} 2 - x & x \leq 2 \\ 3x - 6 & x > 2 \end{cases}$ comprueba que $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 5$



$\lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} (2 - x) = 0$ $\qquad \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3x - 6) = 0$

Es digno de resaltar, que existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 0$ y además coincide con $f(2)$

1.2.2 b) Función continua en x_0

Un tipo muy particular de funciones convergentes en un punto x_0, son las funciones continuas. Su definición es la siguiente:

Definition 11 Sea f una función definida en un intervalo I y sea $x_0 \in I$. Diremos que la función f es continua en un punto x_0 si $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Nota 1: Las funciones elementales son continuas en todo punto de su dominio. Así pues; para calcular el límite de una función elemental en un punto de su dominio, bastará con sustituir la x por el punto x_0.

Nota2: Si una función f es continua en $x_0 \Rightarrow f$ es convergente en x_0

Nota3: Si una función f es convergente en $x_0 \not\Rightarrow f$ sea continua en x_0.

Existen funciones convergentes en x_0 y sin embargo no continuas en él.

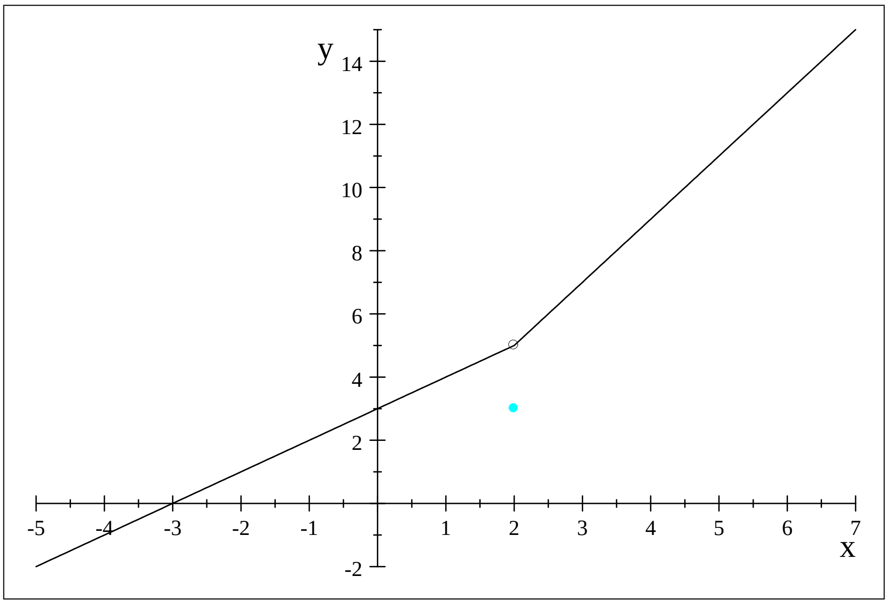
Example 12 *La función $f(x) = \dfrac{x - x^2}{x}$ en el punto $x = 0$ (Es convergente pero no es continua en $x = 0$)*

El dominio de definición de esta función es $\Re \sim \{0\}$. Luego f ya no puede ser continua en $x = 0$,y sin embargo; si que es convergente en $x = 0$ ya que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - x^2}{x} = 1$ como hemos comprobado con anterioridad

1.2.3 c) Función presenta en $x_0$una discontinuidad evitable

Si $\lim_{x \to x_o} f(x) = l \neq f(x_o)$ *diremos que la función no es continua en* $x = x_o$. *Diremos que para dicho valor la función presenta una discontinuidad evitable.*

Example 13 *Un ejemplo de esta situación es la función* $f(x) = \begin{cases} 3+x & x<2 \\ 3 & x=2 \\ 2x+1 & x>2 \end{cases}$

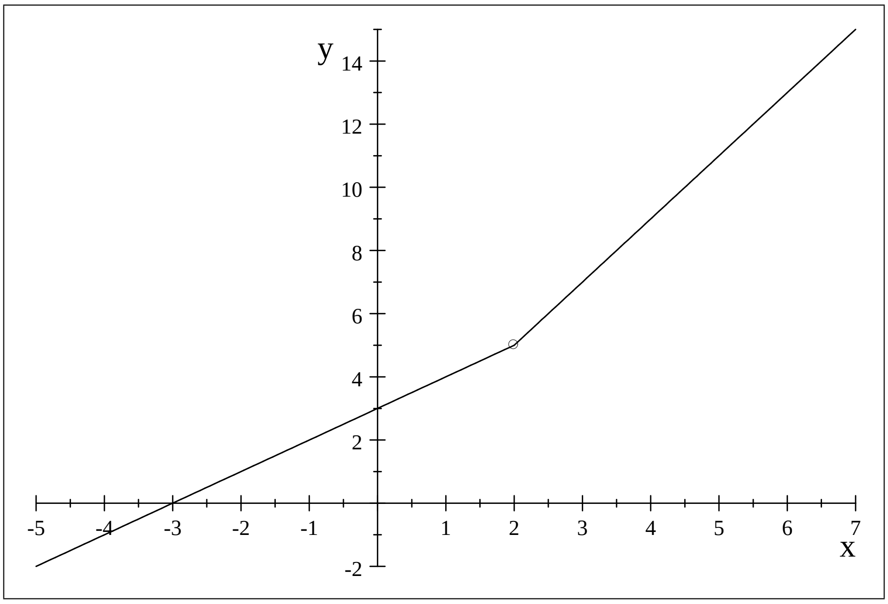


Esta función verifica que $\lim_{x \to 2} f(x) = 5 \neq f(2) = 3$.

Esta función no es continua para $x = 2$;presentando en dicho punto una discontinuidad evitable

Si $\lim_{x \to x_o} f(x) = l$ *y no existe* $f(x_o)$ *la función tampoco es continua en* $x = x_o$. *Diremos que para dicho valor la función presenta una discontinuidad evitable.*

Example 14 *Un ejemplo de esta situación es la función* $f(x) = \begin{cases} 3+x & x<2 \\ 2x+1 & x>2 \end{cases}$



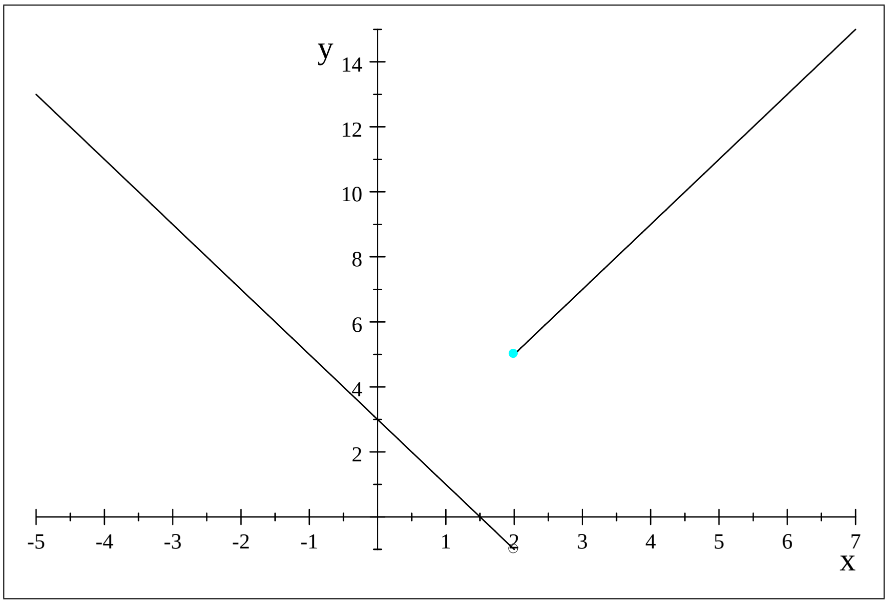
Esta función verifica que $\lim_{x \to 2} f(x) = 5$ y no existe $f(2)$.

Esta función no es continua para $x = 2$;presentando en dicho punto una discontinuidad evitable

1.2.4 d) Función presenta en x_0 una discontinuidad de salto finito

Nota 6: Si no existe $\lim_{x \to x_o} f(x)$ *porque sus límites laterales son diferentes y finitos; aunque exista o no* $f(x_o)$ *la función tampoco es continua en* $x = x_o$*. Diremos que para dicho valor la función presenta una discontinuidad inevitable de salto finito.*

Example 15 *Un ejemplo de esta situación es la función* $f(x) = \begin{cases} 3 - 2x & x < 2 \\ 2x + 1 & x \geq 2 \end{cases}$



Como $\left.\begin{array}{c} \lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} (2x+1) = 5 \\ \lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} (3-2x) = -1 \end{array}\right\} \to$No existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$ y $f(2) = 5$

La función no es continua para $x = 2$. Presenta para $x = 2$ una discontinuidad inevitable de salto finito

1.2.5 e) Función presenta en x_0 una discontinuidad de salto infinito

1) Función divergente a $+\infty$ en x_0

$\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$

Si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ $\Leftrightarrow$La recta $x = x_0$ es una asíntota vertical, de ramas convergentes, de la gráfica de la función $f(x)$

Si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty$ $\Rightarrow$La función presenta para $x = x_o$ una discontinuidad de salto infinito

Definition 16 $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall k > 0$*(tan grande como queramos)* $\exists\delta > 0$

$$/si \left[\begin{array}{c} 0 < |x - x_o| < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{array}\right] \Rightarrow f(x) > k$$

$\Leftrightarrow \forall k > 0$(tan grande como queramos) $\exists\delta > 0$/si $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \sim \{x_o\} \Rightarrow f(x) \in (k, +\infty)$

Example 17 $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{7}{(x-2)^2} = +\infty$ *(La recta $x = 2$ es una asíntota vertical (ramas convergentes) de la gráfica de la función)*

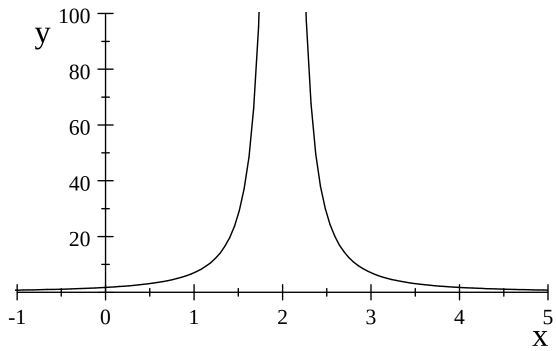
Proof. Dado un $K > 0$ ¿para qué δ se verifica que$f(x) > K$ siempre que $0 < |x - 2| < \delta$?

Fíjate que:

$$\frac{7}{(x-2)^2} > K \Leftrightarrow (x-2)^2 < \frac{7}{k} \Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{\tfrac{7}{k}}$$

Por lo tanto; bastaría con escoger como δ el valor $\delta \leq \sqrt{\frac{7}{k}}$

Observa que si K es un número positivo dado, cada vez mayor; entonces el δ encontrado será cada vez más pequeño ■



2) Función divergente a -∞ en x_0

$\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty$ (Función divergente a $-\infty$ en x_0)

Si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty \Leftrightarrow$La recta $x = x_0$ es una asíntota vertical (ramas convergentes) de la gráfica de la función $f(x) \Leftrightarrow$

Si $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty \Rightarrow$La función presenta para $x = x_o$ una discontinuidad de salto infinito

Definition 18 $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall k > 0$*(tan grande como queramos)* $\exists\delta > 0$ */si* $0 < |x - x_o| < \delta \Rightarrow f(x) < -k$

$\Leftrightarrow \forall k > 0$ (tan grande como queramos) $\exists\delta > 0$/si $x \in (x_o - \delta, x_o + \delta) \sim \{x_o\} \Rightarrow f(x) \in (-\infty, -k)$

Example 19 $\lim\limits_{x\to 2} \frac{-7}{(x-2)^2} = -\infty$ *(La recta* $x = 2$ *es una asíntota vertical, de ramas convergentes, de la gráfica de la función* $f(x) = \frac{-7}{(x-2)^2}$

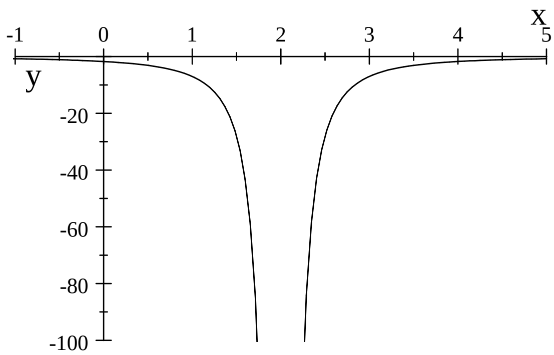
Proof. Dado un $K > 0$ ¿para qué δ se verifica que$f(x) < -K$ siempre que $0 < |x - 2| < \delta$?

Fíjate que:

$$\frac{-7}{(x-2)^2} < -K \Leftrightarrow (x-2)^2 < \frac{7}{k} \Leftrightarrow |x-2| < \sqrt{\tfrac{7}{k}}$$

Por lo tanto; bastaría con escoger como δ el valor $\delta \leq \sqrt{\frac{7}{k}}$

Observa que si K es un número positivo dado cada vez mayor; entonces el δ encontrado será cada vez más pequeño ■

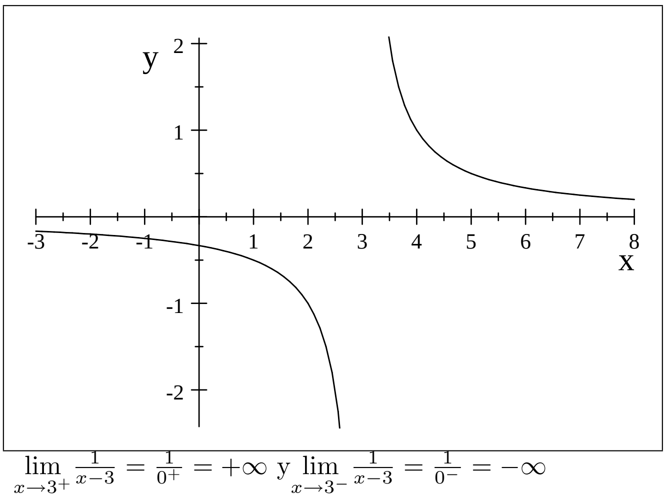


Asíntota vertical de una función

Definition 20 *Si alguno de los límites laterales siguientes* $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$ *ó* $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ *da* $+\infty$ *ó* $-\infty$ *diremos que la recta* $x = x_0$ *es una asíntota vertical de la función* $y = f(x)$

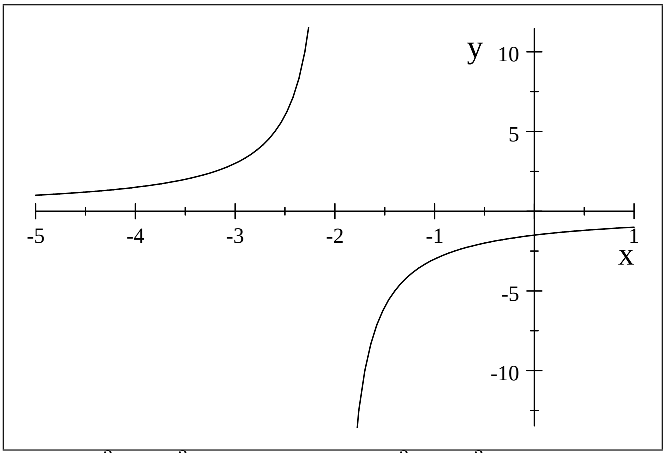
Nota: Pueden existir las siguientes asíntotas verticales:

1. De ramas divergentes $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$(ó $\lim_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$)
   La función $y = \frac{1}{x-3}$ presenta en $x = 3$ una discontinuidad de salto infinito. La recta vertical $x = 3$ es una asíntota vertical de ramas divergentes



$\lim_{x\to 3^+} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ y $\lim_{x\to 3^-} \frac{1}{x-3} = \frac{1}{0^-} = -\infty$

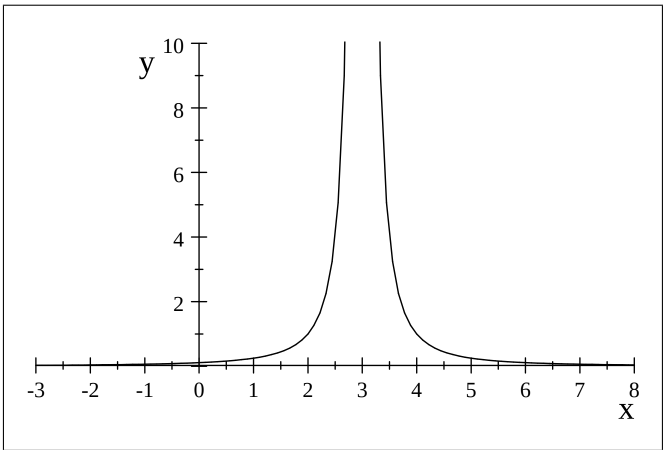
La función $y = \frac{-3}{x+2}$ presenta para $x = -2$ una discontinuidad de salto infinito. La recta vertical $x = -2$ es una asíntota vertical de ramas divergentes



$\lim\limits_{x \to -2^+} \frac{-3}{x+2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to -2^-} \frac{-3}{x+2} = \frac{-3}{0^-} = +\infty$

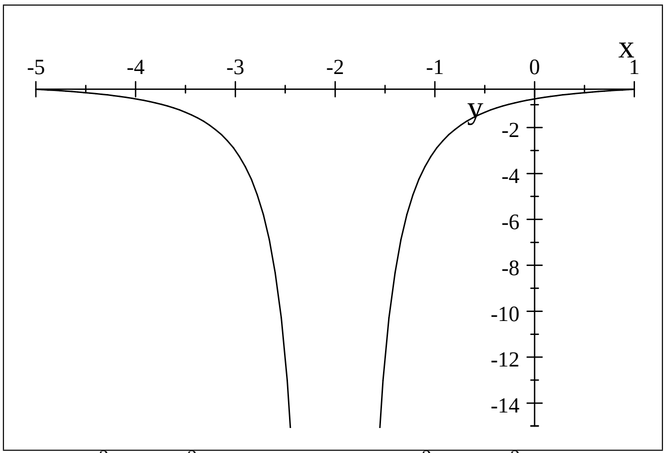
2. De ramas convergentes $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty$(ó $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$ y $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty$)

   La función $y = \frac{1}{(x-3)^2}$ presenta en $x = 3$ una discontinuidad de salto infinito (La función f es divergente a $+\infty$ en $x = 3$). La recta vertical $x = 3$ es una asíntota vertical de ramas convergentes



$\lim\limits_{x \to 3^+} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$ y $\lim\limits_{x \to 3^-} \frac{1}{(x-3)^2} = \frac{1}{0^+} = +\infty$

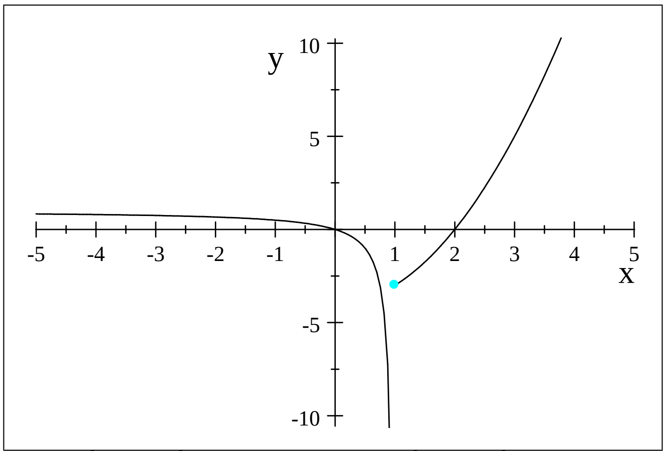
La función $y = \frac{-3}{(x+2)^2}$ presenta para $x = -2$ una discontinuidad de salto infinito (La función f es divergente a $-\infty$ en $x = -2$). La recta vertical $x = -2$ es una asíntota vertical de ramas convergentes



$\lim_{x \to -2^+} \frac{-3}{(x+2)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$ y $\lim_{x \to -2^-} \frac{-3}{(x+2)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

3. Como también pueden existir asíntotas verticales, solamente por un lado (Por ejemplo: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = l$)

Dada la función $f(x) = \begin{cases} \frac{x}{x-1} & \text{si } x < 1 \\ x^2 - 4 & \text{si } x \geq 1 \end{cases}$



$\lim_{x \to -2^+} \frac{-3}{(x+2)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$ y $\lim_{x \to -2^-} \frac{-3}{(x+2)^2} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

En todas estas situaciones donde $x = x_o$ *sea una asíntota vertical de la función, diremos que la función para* $x = x_o$ *presenta una discontinuidad inevitable de salto infinito*

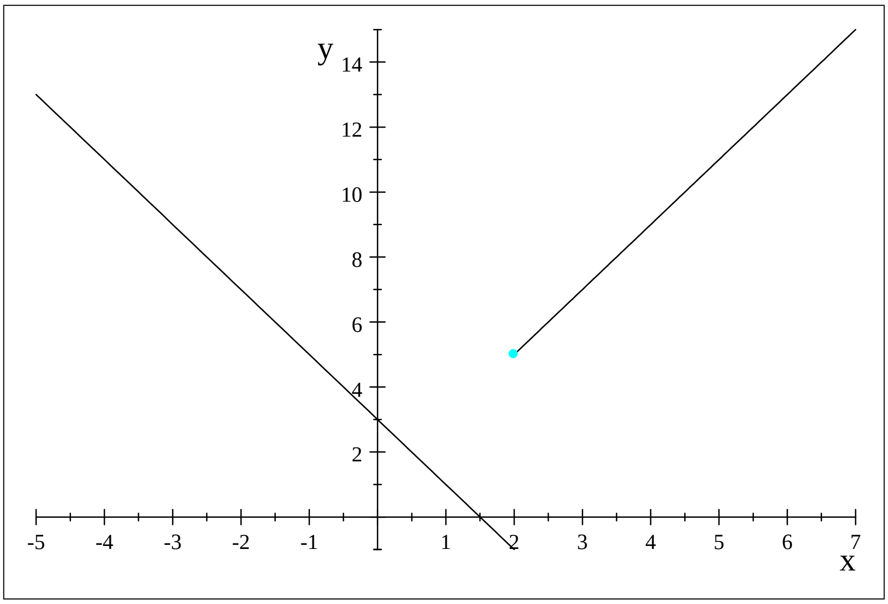
Intenta considerar tú, todas las opciones posibles para que la recta $x = x_0$ sea una asíntota vertical

1.2.6 e) Inexistencia del límite

Puede ocurrir que :

1. No exista $\lim_{x\to x_o} f(x)$, debido a que sus límites laterales sean diferentes (Discontinuidad de salto finito)

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x & x<2 \\ 2x+1 & x\geq 2 \end{cases}$$

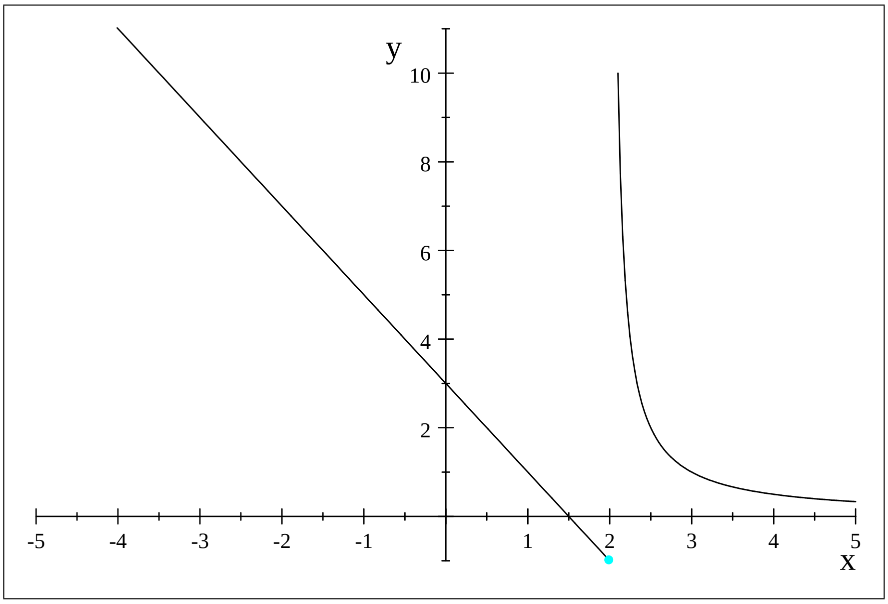


Como $\lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+} (2x+1) = 5$ y $\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} (3-2x) = -1$. Entonces; no existe $\lim_{x\to 2} f(x)$ aunque $f(2)=5$

La función no es continua para $x=2$. Presenta para $x=2$ una discontinuidad inevitable de salto finito

2 No exista $\lim_{x\to x_o} f(x)$,debido a que la recta $x=x_o$ sea asíntota vertical (al menos por un lado)

$$f(x) = \begin{cases} 3-2x & x\leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & x>2 \end{cases}$$

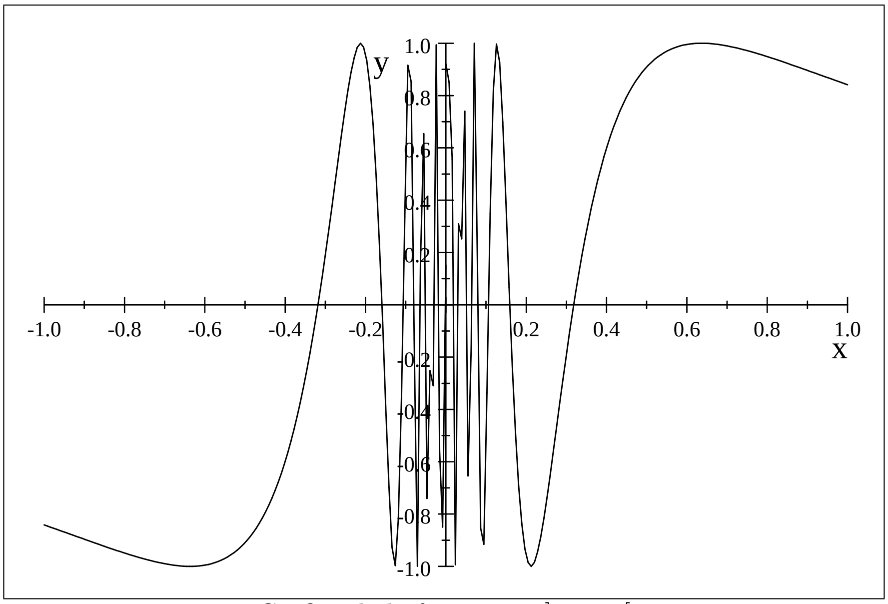


Como $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2^+} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^+} \left(\dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty \\ \lim\limits_{x \to 2^-} f(x) = \lim\limits_{x \to 2^-} (3-2x) = -1 \end{array}\right\} \to$No existe $\lim\limits_{x \to 2} f(x)$ aunque $f(2) = -1$

La recta $x = 2$ es una asíntota vertical por la derecha de la función. La función presenta para $x = 2$ una discontinuidad inevitable de salto infinito.

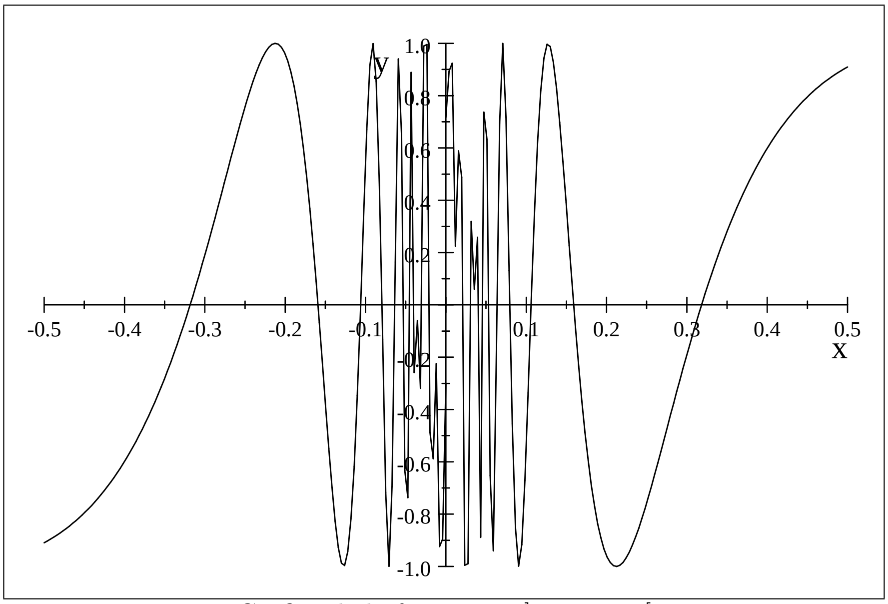
3 No exista $\lim\limits_{x \to x_o} f(x)$ debido al comportamiento de la función en un entorno reducido de centro x_0 y radio tan pequeño como deseemos (Oscilación brusca)

No existe $\lim\limits_{x \to 0} \sin(\dfrac{1}{x})$.Fíjate como oscila la función en $]-1,1[$



Gráfica de la función en $]-1,1[$

Fíjate como oscila la función en $]-0.5,0.5[$



Gráfica de la función en $]-0.5,0.5[$

1.3 Algebra de los límites

Como las funciones se pueden operar entre sí utilizando las operaciones elementales de suma, resta, multiplicación , división y potencia; pueden darse situaciones en las que el límite se puede calcular directamente; para lo cual tendrás que recordar:

Límites de sumas,restas, multiplicación y división de funciones

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=b \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o}\,(f(x)\pm g(x))=a\pm b \\ \lim\limits_{x\to x_o}\,(f(x)\cdot g(x))=a\cdot b \\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{a}{b} \text{ siempre que } b\neq 0 \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a\ (a\neq 0) \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o}\,(f(x)\pm g(x))=\pm\infty \\ \lim\limits_{x\to x_o}\,(f(x)\cdot g(x))=\left\{\begin{array}{l} +\infty \text{ si } a>0 \\ -\infty \text{ si } a<0 \end{array}\right. \\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{a}{+\infty}=0 \\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)=\dfrac{+\infty}{a}=\left\{\begin{array}{l} +\infty \text{ si } a>0 \\ -\infty \text{ si } a<0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=-\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o}\,(f(x)\pm g(x))=\mp\infty \\ \lim\limits_{x\to x_o}\,(f(x)\cdot g(x))=\left\{\begin{array}{l} -\infty \text{ si } a>0 \\ +\infty \text{ si } a<0 \end{array}\right. \\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\dfrac{a}{-\infty}=0 \\ \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{g(x)}{f(x)}\right)=\dfrac{-\infty}{a}=\left\{\begin{array}{l} -\infty \text{ si } a>0 \\ +\infty \text{ si } a<0 \end{array}\right. \end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o} f(x)=a\ (a\neq 0) \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0 \end{array}\right\} \text{entonces } \lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{a}{0}$$

.Diremos que la función presenta para $x=x_o$ una discontinuidad de salto infinito. La recta $x=x_o$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función. Siempre tendremos que estudiar los límites laterales para determinar como son las asíntotas verticales (ramas convergentes , ramas divergentes, etc...)

Las situaciones que se pueden dar en los límites laterales son:

$$\begin{array}{l} \dfrac{a}{0^+}=\left\{\begin{array}{l} +\infty \text{ si } a>0 \\ -\infty \text{ si } a>0 \end{array}\right. \\ \dfrac{a}{0^-}=\left\{\begin{array}{l} -\infty \text{ si } a>0 \\ +\infty \text{ si } a>0 \end{array}\right. \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0 \end{array}\right\} \text{entonces} \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}} \text{ es una indeterminación}$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0 \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty \text{ o } -\infty \end{array}\right\} \text{entonces } \lim\limits_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}=0$$

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty(\text{ o } -\infty) \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 0\end{array}\right\}$entonces $\boxed{\lim\limits_{x\to x_o} f(x)g(x) = 0\cdot(+\infty)}$es una indeterminación

$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty(\text{ o } -\infty) \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = 0\end{array}\right\}$entonces $\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \dfrac{+\infty}{0}$ .Diremos que la función presenta para $x = x_o$ una discontinuidad de salto infinito.
La recta $x = x_o$ es una asíntota vertical de la gráfica de la función. Siempre tendremos que estudiar los límites laterales para determinar cómo son las asintotas verticales (ramas convergentes, ramas divergentes etc.)

Las situaciones que se pueden dar en estos límites laterales son:

$$\frac{+\infty}{0^+} = +\infty$$
$$\frac{+\infty}{0^-} = -\infty$$

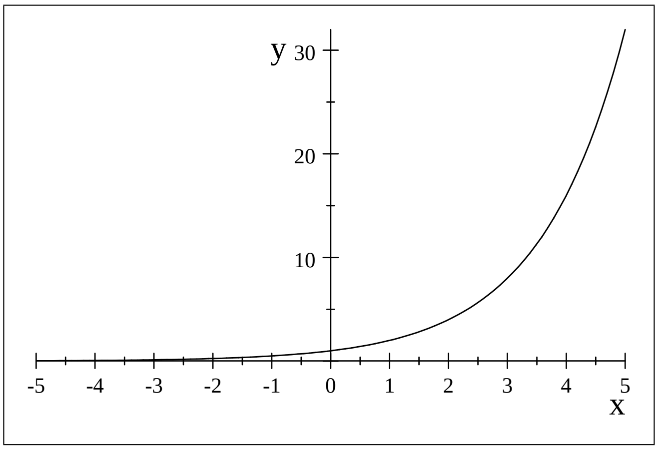
$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = +\infty \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} (f(x)+g(x)) = +\infty \\ \boxed{\lim\limits_{x\to x_o} (f(x)-g(x)) = +\infty-(+\infty)} \text{ es indeterminación} \\ \lim\limits_{x\to x_o} (f(x)\cdot g(x)) = +\infty \\ \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{+\infty}{+\infty}} \text{ es indeterminación}\end{array}\right.$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} (f(x)-g(x)) = -\infty \\ \boxed{\lim\limits_{x\to x_o} (f(x)+g(x)) = -\infty+\infty)} \text{ es indeterminación} \\ \lim\limits_{x\to x_o} (f(x)\cdot g(x)) = -\infty \\ \boxed{\lim\limits_{x\to x_o}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{-\infty}{+\infty}} \text{ es indeterminación}\end{array}\right.$$

Límites de potencias de funciones

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = a \text{ si } a\in\mathbb{R}^+ \sim \{0,1\} \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = b\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim\limits_{x\to x_o} [f(x)]^{g(x)} = a^b$$

Recordando la gráfica de $y = a^x$ cuando $a > 1$



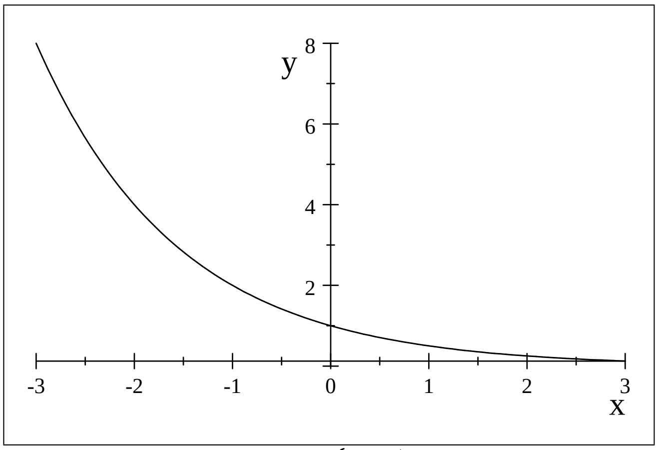
$$\text{Si } a > 1 \Rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = +\infty \\ a^{-\infty} = 0 \end{cases}$$

Podemos deducir fácilmente que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = a \text{ si } a > 1 \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_o} [f(x)]^{g(x)} = a^{+\infty} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = a \text{ si } a > 1 \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_o} [f(x)]^{g(x)} = a^{-\infty} = 0$$

Si ahora recordamos la gráfica de $y = a^x$ cuando $0 < a < 1$



$$\text{Si } 0 < a < 1 \Rightarrow \begin{cases} a^{+\infty} = 0 \\ a^{-\infty} = +\infty \end{cases}$$

Podemos deducir que:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = a \text{ si } 0 < a < 1 \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_o} [f(x)]^{g(x)} = a^{+\infty} = 0$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = a \text{ si } 0 < a < 1 \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_o} [f(x)]^{g(x)} = a^{-\infty} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = +\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_o} [f(x)]^{g(x)} = 0^{+\infty} = 0^+$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = -\infty \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_o} [f(x)]^{g(x)} = (0^+)^{-\infty} = \frac{1}{(0^+)^{+\infty}} = \tfrac{1}{0^+} = +\infty$$

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to x_o} f(x) = 0^+ \\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x) = k \text{ siendo } k > 0 \end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_o} [f(x)]^{g(x)} = (0^+)^k = 0^+$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0^+\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=k \text{ siendo } k<0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_o}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left(0^+\right)^k=\frac{1}{\left(0^+\right)^{-k}}=\frac{1}{0^+}=$$
$$+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=k \text{ siendo } k>0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_o}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left(+\infty\right)^k=+\infty$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=k \text{ siendo } k<0\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_o}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left(+\infty\right)^k=\frac{1}{\left(+\infty\right)^{-k}}=$$
$$\frac{1}{+\infty}=0$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=1\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=+\infty \text{ o } -\infty\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to x_o}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left\{\begin{array}{l}1^{+\infty}\\ \quad o \\ 1^{-\infty}\end{array}\right. \text{ indeterminación}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=0^+\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to x_o}\left[f(x)\right]^{g(x)}=0^0 \text{ indeterminación}}$$

$$\left.\begin{array}{l}\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to x_o} g(x)=0\end{array}\right\} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to x_o}\left[f(x)\right]^{g(x)}=\left(+\infty\right)^0 \text{ indeterminación}}$$

Las únicas situaciones en las que no podemos afirmar el valor del límite, son las indeterminaciones siguientes:

$$\frac{0}{0}, 0\cdot\infty, \frac{\infty}{\infty}, \infty-\infty, 1^\infty, 0^0 \ y \ \infty^0$$

El objetivo de estos apuntes es saber como eliminar esas indeterminaciones y calcular el correspondiente límite

1.4 Técnicas de cálculo de límites

Theorem 21 *(Funciones que coinciden en todos sus puntos menos en uno) Sea x_0 un número real y sean f y g dos funciones que coinciden en todos los puntos de un entorno de x_0, salvo quizás en x_0. Entonces, si existe el limite de una de ellas en x_0, también existe el límite de la otra y además son iguales*

$$\left.\begin{array}{l} f(x)=g(x) \text{ para todo } x\in E_\delta^*(x_0)\\ \exists \lim\limits_{x\to x_0} f(x) \ (o \lim\limits_{x\to x_0} g(x))\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)$$

Proof. [Demostración] Supongamos que existe el $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=l$. Entonces, por la definición, se tiene que para cada $\varepsilon>0$ existe un $\delta>0$ (depende de ε) tal que:

$$\begin{array}{rcl} f(x) & \in & E_\varepsilon(l) \text{ siempre que } x\in E_\delta^*(x_0)\\ & \Updownarrow & \\ |f(x)-l| & < & \varepsilon \text{ siempre que } 0<|x-x_0|<\delta\end{array}$$

Ahora bien, como $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in E_\delta^*(x_0) =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\sim \{x_0\}$.

Entonces resulta que:

$$\begin{array}{rcl} g(x) & \in & E_\varepsilon(l) \text{ siempre que } x \in E_\delta^*(x_0) \\ & \Updownarrow & \\ |g(x) - l| & < & \varepsilon \text{ siempre que } 0 < |x - x_0| < \delta \end{array}$$

Por lo tanto; $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = l$ ■

Utilizando el teorema anterior vamos a explicar algunas técnicas de cálculo de límites.

1.4.1 *a) Técnicas de cancelación*

Se aplica en las funciones racionales cuando nos encontramos con una indeterminación del tipo $\dfrac{0}{0}$

Sea $f(x) = \dfrac{P(x)}{Q(x)}$ y supongamos que $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{P(x)}{Q(x)} = \dfrac{P(x_0)}{Q(x_0)} = \dfrac{0}{0}$

Al ser $\left.\begin{array}{c} P(x_0) = 0 \Longleftrightarrow P(x) = (x - x_0) \cdot P_1(x) \\ Q(x_0) = 0 \Longleftrightarrow Q(x) = (x - x_0) \cdot Q_1(x) \end{array}\right\} \Longrightarrow$ Por el teorema anterior, podemos cancelar el factor $(x - x_0)$ en el numerador y denominador y aplicar la sustitución directa. Pudiendose presentar las siguientes posibilidades

- Si $Q_1(x_0) \neq 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \cdot P_1(x)}{(x - x_0) \cdot Q_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)}$$

Fíjate, que para $x = x_0$ la función f presenta una discontinuidad evitable; ya que no existe $f(x_0)$ y sin embargo si que $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$. La gráfica de la función $y = f(x)$ coincide con la de la función $y = \dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ si a ésta le quitamos el punto $P(x_0, \dfrac{P_1(x_0)}{Q_1(x_0)})$.

- Si $P_1(x_0) \neq 0$ y $Q_1(x_0) = 0$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \frac{P(x)}{Q(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0) \cdot P_1(x)}{(x - x_0) \cdot Q_1(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} = \frac{P_1(x_0)}{0}$$

Procederemos a estudiar los límites laterales; ya que la recta $x = x_0$ *es una asíntota vertical* y siempre nos interesa conocer el comportamiento de la función en un entorno reducido de centro x_0 y radio tan pequeño como deseemos.

En esta situación, diremos que la función f *presenta en* x_0 *una discontinuidad de salto infinito*

- Si $P_1(x_0) = 0$ y $Q_1(x_0) = 0$

Volveremos a factorizar y cancelar, pudiéndose dar cualquiera de las dos situaciones anteriores

Example 22 *Calcula* $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}$ *y* $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}$

Sea $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1}$ como $2x^2+3x+1 = (x+1)(2x+1)$ entonces su dominio de definición (y de continuidad) es:

$$D(f) = \Re \sim \left\{-\frac{1}{2}, -1\right\}$$

1) $\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1} = \frac{0}{0}$
$\lim_{x\to -1} \frac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \lim_{x\to -1} \frac{(x+2)}{(2x+1)} = -1$

La función presenta para $x = -1$ una discontinuidad evitable. La gráfica de la función $y = f(x)$ coincide con la de la función $y = \frac{(x+2)}{(2x+1)}$ si le quitamos a ésta el punto de coordenadas $P(-1,-1)$.

2) $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1} = \frac{\frac{1}{4} - \frac{3}{2} + 2}{0} = \frac{\frac{3}{4}}{0}$

Sabemos que la función presenta para $x = -\frac{1}{2}$ una discontinuidad de salto infinito. Además la recta $x = -\frac{1}{2}$ es una asíntota vertical.

Nos interesa estudiar el comportamiento de la función en un entorno reducido de $-\frac{1}{2}$. Para lo cual, tendremos que estudiar sus límites laterales.

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^+} \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \frac{\frac{3}{4}}{0^+} = +\infty$$

$$\lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{x^2+3x+2}{2x^2+3x+1} = \lim_{x\to\left(-\frac{1}{2}\right)^-} \frac{(x+2)(x+1)}{(x+1)(2x+1)} = \frac{\frac{3}{4}}{0^-} = -\infty$$

Example 23 *Calcula* $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9}$, $\lim_{x\to -3} \frac{x-3}{x^2-9}, \lim_{x\to 2} \frac{x-3}{x^2-9}$

Sea $f(x) = \frac{x-3}{x^2-9}$ como $x^2-9 = (x-3)(x+3)$ entonces su dominio de definición (y de continuidad) es:

$$D(f) = \Re \sim \{-3, 3\}$$

1) $\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{0}{0}$
$\lim_{x\to 3} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x\to 3} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \lim_{x\to 3} \frac{1}{x+3} = \frac{1}{6}$

La función presenta para $x = 3$ una discontinuidad evitable. La gráfica de la función $y = f(x)$ coincide con la de la función $y = \frac{1}{x+3}$ si le quitamos a ésta el punto de coordenadas $P(3, \frac{1}{6})$.

2) $\lim_{x\to -3} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{-6}{0}$

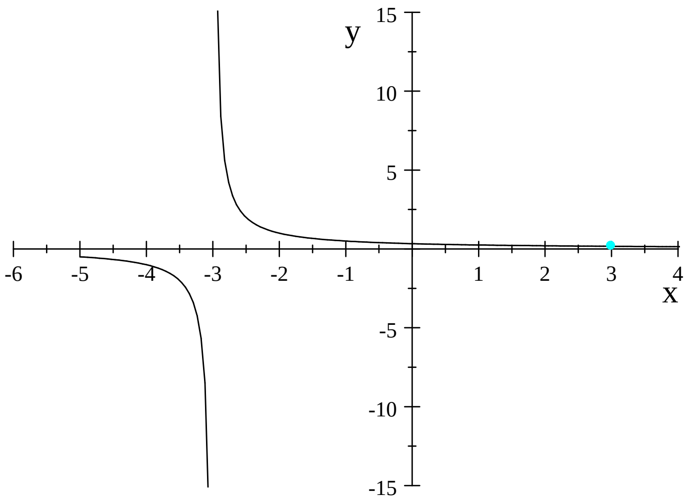
Sabemos que la función presenta para $x = -3$ una discontinuidad de salto infinito. Además la recta $x = -3$ es una asíntota vertical.

Como nos interesa estudiar el comportamiento de la función en un entorno reducido de -3. Tendremos que estudiar sus límites laterales.

$$\lim_{x \to (-3)^+} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \to (-3)^+} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{-6}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \to (-3)^-} \frac{x-3}{x^2-9} = \lim_{x \to (-3)^+} \frac{x-3}{(x-3)(x+3)} = \frac{-6}{0^-} = +\infty$$

Mira ahora su gráfica



3) $\lim_{x \to 2} \frac{x-3}{x^2-9} = \frac{1}{5}$

1.4.2 *b) Técnicas de racionalización*

Se aplica en las funciones irracionales cuando nos encontramos con una indeterminación del tipo $\frac{0}{0}$ o del tipo $\infty - \infty$.

En el caso de que aparezcan raíces cuadradas, multiplicaremos numerador y denominador por el conjugado.

En el caso de que aparezcan raíces de índice distinto de 2, utilizaremos la relación: $A^n - B^n = (A-B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + ... + AB^{n-2} + B^{n-1})$ que nos permite expresar $A - B$ de la siguiente manera:

$$A - B = \frac{A^n - B^n}{A^{n-1} + A^{n-2}B + ... + AB^{n-2} + B^{n-1}}$$

Ejemplos: $\sqrt[5]{x} - 2 = \dfrac{x-32}{\sqrt[5]{x^4} + 2\sqrt[5]{x^3} + 4\sqrt[5]{x^2} + 8\sqrt[5]{x} + 16}$

$\sqrt[4]{x} - 3 = \dfrac{x-81}{\sqrt[4]{x^3} + 3\sqrt[4]{x^2} + 9\sqrt[4]{x} + 27}$

$\sqrt[3]{x} - 1 = \dfrac{x-1}{\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{x} + 1}$

Example 24 *Calcula* $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$, $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$

Dada la función $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ su dominio de definición (o de continuidad) es:

$D(f)=\{x\in\Re/x+1\geq 0 \text{ } y \text{ } x-3\neq 0\}=[-1,3)\cup(3,+\infty)$

1) $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\dfrac{0}{0}$

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\left(\sqrt{x+1}-2\right)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$

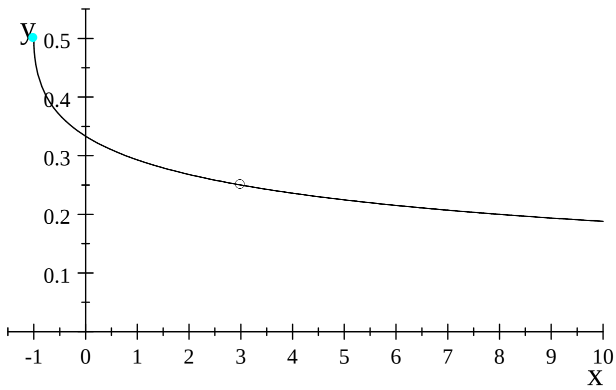
Al sustituir nos vuelve a salir $\dfrac{0}{0}$ pero podemos utilizar la técnica de la cancelación y por lo tanto:

$\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x-3}{(x-3)\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}=\dfrac{1}{4}$

La función presenta para $x=3$ una discontinuidad evitable. La gráfica de la función $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$ coincide con la de la función $y=\dfrac{1}{\left(\sqrt{x+1}+2\right)}$ si le quitamos a ésta el punto de coordenadas $P(3,\dfrac{1}{4})$.

2) $\lim\limits_{x\to(-1)^+}\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}=\dfrac{1}{2}$

Mira la gráfica de la función $y=\dfrac{\sqrt{x+1}-2}{x-3}$



Example 25 *Calcula* $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

Dada la función $y=\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:

$D(f)=\Re\sim\{8\}$

$\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 8}\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=^{1}\lim_{x\to 8}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}=\frac{1}{4+4+4}=\frac{1}{12}$$

Example 26 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}=^{2}\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}$$

Cancelando el factor $x-1$ tendremos

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1\right)}=\frac{1}{3}$$

Example 27 $\lim_{x\to 32}\frac{\sqrt[5]{x}-2}{x-32}$

$$\lim_{x\to 32}\frac{\sqrt[5]{x}-2}{x-32}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 32}\frac{\sqrt[5]{x}-2}{x-32}=^{3}\lim_{x\to 1}\frac{x-32}{(x-32)\left(\sqrt[5]{x^4}+2\sqrt[5]{x^3}+4\sqrt[5]{x^2}+8\sqrt[5]{x}+16\right)}$$

Cancelando el factor $x-32$ tendremos

$$\lim_{x\to 32}\frac{1}{\left(\sqrt[5]{x^4}+2\sqrt[5]{x^3}+4\sqrt[5]{x^2}+8\sqrt[5]{x}+16\right)}=\frac{1}{80}$$

Example 28 *Calcula tú el siguiente* $\lim_{x\to 2^n}\frac{\sqrt[n]{x}-2}{x-2^n}$ *y comprueba que da* $\frac{1}{n\cdot 2^{n-1}}$

Example 29 $\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{5x-4}-4}{\sqrt{x+5}-3}\right)$

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{5x-4}-4}{\sqrt{x+5}-3}\right)=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{5x-4}-4}{\sqrt{x+5}-3}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\left(\sqrt{5x-4}-4\right)\left(\sqrt{5x-4}+4\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{x+5}-3\right)\left(\sqrt{x+5}+3\right)\left(\sqrt{5x-4}+4\right)}=$$
$$\lim_{x\to 4}\frac{(5x-20)\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{(x-4)\left(\sqrt{5x-4}+4\right)}=^{6}\lim_{x\to 4}\frac{5\left(\sqrt{x+5}+3\right)}{\left(\sqrt{5x-4}+4\right)}=\frac{5\cdot 6}{8}=\frac{15}{4}$$

---

[1] Nota: Como $A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+.....+AB^{n-2}+B^{n-1})$ entonces:

$$A-B=\frac{A^n-B^n}{A^{n-1}+A^{n-2}B+.....+AB^{n-2}+B^{n-1}}$$

En particular , la expresión $\sqrt[3]{x}-2=\frac{(x-8)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}$

Con lo que, la función quedará así:

$$y=\frac{\sqrt[3]{x}-2}{x-8}=\frac{(x-8)}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}\cdot\frac{1}{(x-8)}=\frac{1}{\left(\sqrt[3]{x}\right)^2+2\sqrt[3]{x}+4}\text{ siendo }x\neq 8$$

[2] $\sqrt[3]{x}-1=\frac{x-1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1}$

[3] $\sqrt[5]{x}-2=\frac{x-32}{\sqrt[5]{x^4}+2\sqrt[5]{x^3}+4\sqrt[5]{x^2}+8\sqrt[5]{x}+16}$

1.4.3 *b) Técnicas de cálculo*

Es útil cuando tengamos resta o productos de funciones

Example 30 *Calcula* $\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{x-3}}-\frac{1}{\sqrt{(x-3)^3}}\right)$

Dada la función $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{\sqrt{(x-3)^3}}$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:

$D(f)=(3,+\infty)$

Fíjate que $y=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}}-\dfrac{1}{\sqrt{(x-3)^3}}=\frac{x-4}{\left(\sqrt{(x-3)}\right)^3}$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{\sqrt{x-3}}-\frac{1}{\sqrt{(x-3)^3}}\right)=\lim_{x\to 3^+}\left(\frac{x-4}{\left(\sqrt{(x-3)}\right)^3}\right)=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

Example 31 *Calcula* $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{(x-3)^2}\right)$

Dada la función $y=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{(x-3)^2}$

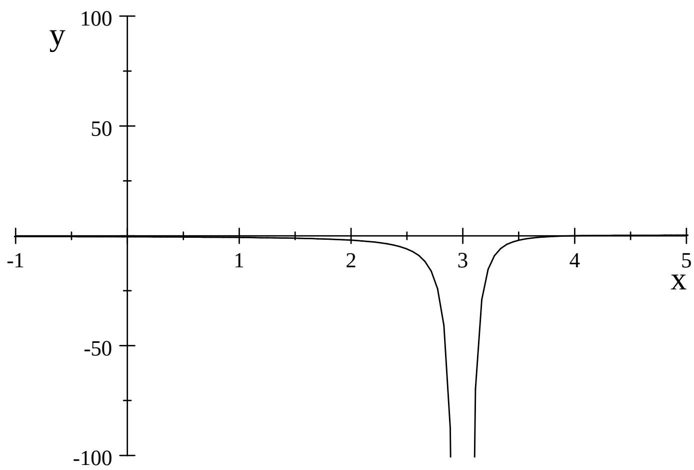
Su dominio de definición (o de continuidad) es:

$D(f)=\Re\sim\{3\}$

Fíjate que $y=\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{(x-3)^2}=\frac{x-4}{(x-3)^2}$

$$\lim_{x\to 3}\left(\frac{1}{x-3}-\frac{1}{(x-3)^2}\right)=\lim_{x\to 3}\frac{x-4}{(x-3)^2}=\frac{-1}{0^+}=-\infty$$

La recta $x=3$ es una asintota vertical de ramas convergentes hacia $-\infty$



Example 32 *Calcula* $\lim_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3}-\dfrac{1}{(x-3)^3}\right)$

Dada la función $y = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^3}$
Su dominio de definición (o de continuidad) es:
$D(f) = \Re \sim \{3\}$
$\lim\limits_{x\to 3}\left(\dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^3}\right) =^{7} \lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^2-6x+8}{(x-3)^3} = \dfrac{1}{0}$
La recta $x = 3$ es una asíntota vertical. La función $y = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^3}$ presenta para $x = 3$ una discontinuidad de salto infinito
Calculemos los límites laterales
$\lim\limits_{x\to 3^+}\left(\dfrac{x^2-6x+8}{(x-3)^3}\right) = \dfrac{-1}{0^+} = -\infty$
$\lim\limits_{x\to 3^-}\left(\dfrac{x^2-6x+8}{(x-3)^3}\right) = \dfrac{-1}{0^-} = +\infty$
La recta $x = 3$ es una asíntota vertical de ramas divergentes

Example 33 *Calcula* $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{3}{(x-1)^2} - 1\right)$

Dada la función $y = \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{3}{(x-1)^2} - 1\right)$
Su dominio de definición (o de continuidad) es:
$D(f) = \Re \sim \{1\}$
Si calculamos por separado cada límite tendremos:
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1} = \dfrac{0}{0}$
$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2-2x+1}{x-1} {}^{8} \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)^2}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}(x-1) = 0$
$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{3}{(x-1)^2} - 1\right) = \dfrac{3}{0^+} - 1 = +\infty - 1 = +\infty$
Con lo cual, el límite $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{3}{(x-1)^2} - 1\right)$presenta la indeterminación $0\cdot\infty$

Para eliminarla y que nos aparezca la indeterminación $\dfrac{0}{0}$ tendremos que calcular la expresión contenida en el límite:
$\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{3}{(x-1)^2} - 1\right) =^{9} \lim\limits_{x\to 1}(x-1)\left(\dfrac{3-(x-1)^2}{(x-1)^2}\right) =$
$\lim\limits_{x\to 1}(x-1)\left(\dfrac{3-(x-1)^2}{(x-1)^2}\right) = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\left(-x^2+2x+2\right)}{(x-1)} = \dfrac{3}{0}$
La recta $x = 1$ es una asíntota vertical de la función. La función presenta en $x = 1$ una discontinuidad de salto infinito.

---

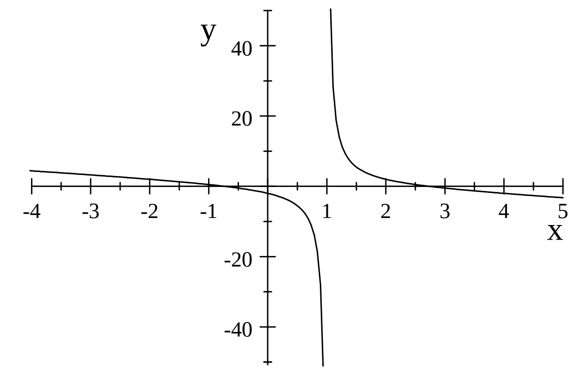
[7] Fíjate que $y = \dfrac{1}{x-3} - \dfrac{1}{(x-3)^3} = \frac{x^2-6x+8}{(x-3)^3}$
[8] $x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2$
[9] Fíjate que $y = \left(\dfrac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\dfrac{3}{(x-1)^2} - 1\right) = \dfrac{\left(-x^2+2x+2\right)}{(x-1)}$

Si calculamos ahora los límites laterales, podremos determinar si es una asíntota de ramas convergentes o divergentes

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\frac{3}{(x-1)^2}-1\right)=\lim_{x\to 1^+}\frac{\left(-x^2+2x+2\right)}{(x-1)}=\frac{3}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 1^-}\left(\frac{x^2-2x+1}{x-1}\right)\left(\frac{3}{(x-1)^2}-1\right)=\lim_{x\to 1^-}\frac{\left(-x^2+2x+2\right)}{(x-1)}=\frac{3}{0^-}=-\infty$$

$x=1$ es asíntota vertical de ramas divergentes



Example 34 *Calcula* $\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x-4}}-\frac{x+3}{\sqrt{2x-8}}\right)$

Su dominio de definición (o de continuidad) es:
$D(f)=\{x\in\Re/x>4\}=(4,+\infty)$
Si calculamos por separado cada límite tendremos:

$$\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 4^+}\frac{1}{\sqrt{x-4}}=\frac{1}{0^+}=+\infty\\ \lim_{x\to 4^+}\frac{x+3}{\sqrt{2x-8}}=\frac{7}{0^+}=+\infty\end{array}\right\}\to\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x-4}}-\frac{x+3}{\sqrt{2x-8}}\right)=\infty-\infty$$

Para eliminar la indeterminación, reduciremos a común denominador la función.

$$\lim_{x\to 4^+}\left(\frac{1}{\sqrt{x-4}}-\frac{x+3}{\sqrt{2x-8}}\right)=^{10}\lim_{x\to 4^+}\frac{\left(2-\sqrt{2}(x+3)\right)}{2\sqrt{(x-4)}}=\frac{2-7\sqrt{2}}{0^+}=-\infty$$

Example 35 $\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}-3}-\frac{1}{\sqrt{x}-2}\right)$

Dada la función $y=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}-3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ su dominio de definición o continuidad es:
$D(f)=[0,4)\cup(4,+\infty)$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}-3}-\frac{1}{\sqrt{x}-2}=\lim_{x\to 4}\frac{x-1-\sqrt{(x+5)}}{\left(\sqrt{(x+5)}-3\right)(\sqrt{x}-2)}=\frac{0}{0}$$

[10] Fíjate que $y=\left(\frac{1}{\sqrt{x-4}}-\frac{x+3}{\sqrt{2x-8}}\right)$ coincide con
$y=\frac{\left(2-\sqrt{2}(x+3)\right)}{2\sqrt{(x-4)}}$

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(x-1-\sqrt{(x+5)}\right)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}+2)}{\left(\sqrt{(x+5)}-3\right)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)}=$$

:

$$\lim_{x\to 4}\frac{\left(x^2-3x-4\right)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)^2\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)}=$$ [11]

$$=\lim_{x\to 4}\frac{(x+1)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)}=\frac{120}{0}$$

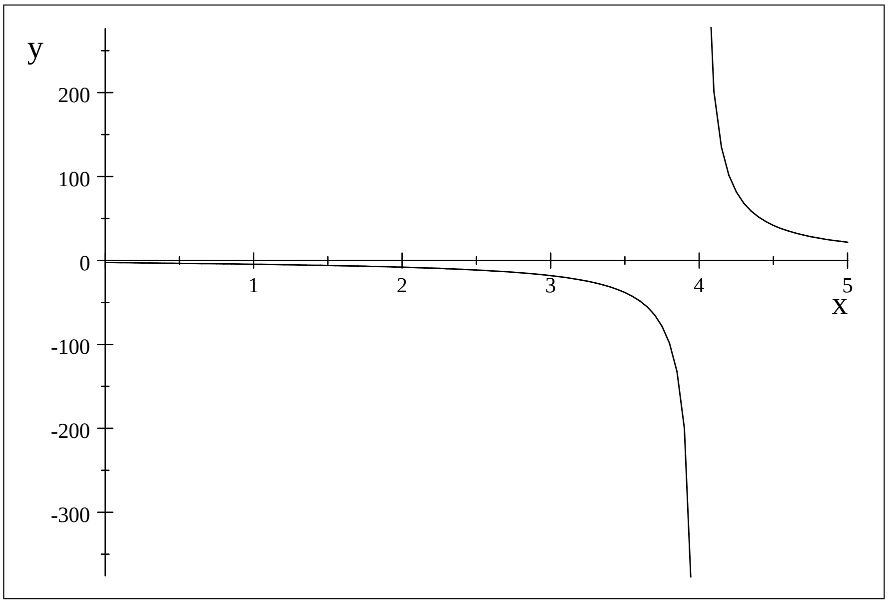
La recta $x=4$ es una asíntota vertical. La función $y=\dfrac{\sqrt{x}+2}{\sqrt{x+5}-3}-\dfrac{1}{\sqrt{x}-2}$ presenta para $x=4$ una discontinuidad de salto infinito.

Calculemos los límites laterales

$$\lim_{x\to 4^+}\frac{(x+1)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)}=\frac{120}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 4^-}\frac{(x+1)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)}=\frac{120}{0^-}=-\infty$$

$$\frac{(x+1)\left(\sqrt{(x+5)}+3\right)(\sqrt{x}+2)}{(x-4)\left(x-1+\sqrt{(x+5)}\right)}$$



La recta $x=4$ es una asíntota vertical de ramas divergentes.

[11] $\dfrac{\left(x^2-3x-4\right)}{(x-4)^2}=\frac{x+1}{x-4}$

1.4.4 Ejercicios de límites de una función en un punto

Exercise 1.4.1 $\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7}{x^2-3}$

$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7}{x^2-3}=11$

Exercise 1.4.2 $\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4+2x^3-x-2}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4+2x^3-x-2}=\frac{0}{0}$

Como $\left.\begin{array}{l} x^3-1=(x-1)\left(x^2+x+1\right) \\ x^4+2x^3-x-2=(x+2)(x-1)\left(x^2+x+1\right)\end{array}\right\}$ entonces

$\lim_{x\to 1}\frac{x^3-1}{x^4+2x^3-x-2}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)\left(x^2+x+1\right)}{(x+2)(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x+2)}=\frac{1}{3}$

Exercise 1.4.3 $\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to a}\frac{x^n-a^n}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{(x-a)(x^{n-1}+ax^{n-2}+....+a^{n-2}x+a^{n-1})}{x-a}=$
$=\lim_{x\to a}(x^{n-1}+ax^{n-2}+....+a^{n-2}x+a^{n-1})=n\cdot a^{n-1}$

Exercise 1.4.4 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}$

$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^n-1}{x}=$ [12] $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x-1)\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}++...+(1+x)^1+1\right)}{x}=$
$=\lim_{x\to 0}\frac{x\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}++...+(1+x)^1+1\right)}{x}=\lim_{x\to 0}\left((1+x)^{n-1}+(1+x)^{n-2}++...+(1+x)^1+1\right)=$
$=n$

Exercise 1.4.5 $\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^m-1}=\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^m-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+......x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x^{m-1}+x^{m-2}+......+x^2+x+1)}=$
$\frac{1}{m}$

Exercise 1.4.6 $\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+......x^2+x+1)}{(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+......x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\frac{(x^{m-1}+x^{m-2}+......x^2+x+1)}{(x^{n-1}+x^{n-2}+......x^2+x+1)}=$
$\frac{m}{n}$

Exercise 1.4.7 $\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3}=\frac{0}{0}$

[12] $A^n-B^n=(A-B)(A^{n-1}+A^{n-2}B+.....+AB^{n-2}+B^{n-1})$

$$\lim_{x\to a}\frac{x^2-(a+1)x+a}{x^3-a^3} =^{13} \lim_{x\to a}\frac{(x-1)(x-a)}{(x-a)(x^2+ax+a^2)} =$$
$$= \lim_{x\to a}\frac{(x-1)}{(x^2+ax+a^2)} = \frac{a-1}{3a^2}$$

Exercise 1.4.8 $\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) = \infty - \infty$

Como $(1-x^3) = (1-x)(1+x+x^2)$ entonces:
$\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3} = \frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)} = \frac{(-x-2)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)}$
$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1}\frac{(-x-2)(1-x)}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(-x-2)}{(1+x+x^2)} = -1$

Exercise 1.4.9 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \frac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[3]{1+x}-\sqrt[3]{1-x}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+x}\right)^3-\left(\sqrt[3]{1-x}\right)^3}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\,\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} =$
$= \lim_{x\to 0}\frac{2x}{x\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\,\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} = \lim_{x\to 0}\frac{2}{\left(\sqrt[3]{(1+x)^2}+\sqrt[3]{1+x}\,\sqrt[3]{1-x}+\sqrt[3]{(1-x)^2}\right)} =$
$\frac{2}{3}$

Exercise 1.4.10 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x}-1}{x-1}$

Exercise 1.4.11 $\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$

Exercise 1.4.12 $\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt{a^2+ax+x^2}-\sqrt{a^2-ax+x^2}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a+x}}$

Exercise 1.4.13 $\lim_{x\to 1}\frac{x\sqrt{x}-x+\sqrt{x}-1}{x-1}$

Exercise 1.4.14 $\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1+\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

---
[13] $x^2-(a+1)x+a = x^2-xa-x+a = x(x-a)-(x-a) = (x-1)(x-a)$
$x^3-a^2 = (x-a)(x^2+ax+a^2)$

1.5 Teoremas para calcular límites:

1.5.1 Función convergente a cero por función acotada en un punto

Theorem 36 *Si* $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0$ *y* g *es una función acotada en un entorno reducido de centro* x_o *y radio tan pequeño como queramos. Entonces, se verifica que* $\lim_{x\to x_o} (f(x)\cdot g(x)) = 0$ *aunque* $g(x_o)$ *no exista.*

Si g está acotada en $(x_o-\delta_1, x_o-\delta_1) \sim \{x_o\} \Leftrightarrow \exists k>0$ tal que $|g(x)|<k$ siempre que $0<|x-x_o|<\delta_1$

Como $\lim_{x\to x_o} f(x) = 0 \Longrightarrow$Para cada $\varepsilon>0$ $\exists\delta>0$ tal que $|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{k}$siempre que $0<|x-x_o|<\delta$

Dado $\varepsilon>0$ $\exists\delta_2=\min\{\delta,\delta_1\}>0$ tal que $\left\{\begin{array}{l}|f(x)|<\dfrac{\varepsilon}{k}\\ y\\ |g(x)|<k\end{array}\right\}$ siempre que $0<|x-x_o|<\delta_2$.

Con lo que:

Dado cualquier $\varepsilon>0$ $\exists\delta_2>0$ / $|f(x)g(x)|<\dfrac{\varepsilon}{k}|g(x)|<\varepsilon$ *siempre que* $0<|x-x_o|<\delta_2$

$\Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}(f(x)\cdot g(x))=0$

Example 37 *Calcula* $\lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$

Sea $h(x)=x\cos\left(\frac{1}{x}\right)$ Su dominio de definición (o de continuidad) es $D(h) = \Re\sim\{0\}$

Como $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} x = 0\\ \left|\cos\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq 1\ \forall x\in\Re\sim\{0\}\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} x\cos\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Example 38 *Calcula* $\lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$

Sea $h(x)=x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ Su dominio de definición (o de continuidad) es $D(h) = \Re\sim\{0\}$

Como $\left.\begin{array}{l}\lim_{x\to 0} x = 0\\ \left|\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right| \leqq 1\ \forall x\in\Re\sim\{0\}\end{array}\right\} \Longrightarrow \lim_{x\to 0} x\sin\left(\frac{1}{x}\right)=0$

Otros límites se pueden resolver utilizando el criterio del emparedado, que a continuación se explica:

1.5.2 *Criterio del emparedado*

Theorem 39

Hipótesis: a)Sean f,g y h tres funciones definidas en un intervalo abierto I y sea $x_o\in I$ de tal manera que $f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$ $\forall x\in I\wedge x\neq x_o$.
b) Si $\lim_{x\to x_o} f(x) = \lim_{x\to x_o} h(x) = l$
Tesis: $\lim_{x\to x_o} g(x) = l$

Demostración:
Para todo $x \neq x_o \wedge x \in I$, se tiene que
$|g(x) - l| = |g(x) - f(x) - (l - f(x))| \leqslant |g(x) - f(x)| + |f(x) - l|$
$\leqslant |h(x) - f(x)| + |f(x) - l|$ pues $|g(x) - f(x)| \leqslant |h(x) - f(x)|$hipótesis a
$\leqslant |h(x) - l - (f(x) - l)| + |f(x) - l|$
$\leqslant |h(x) - l| + 2\,|f(x) - l|$ (1)
Sea $\varepsilon > 0$, por ser $\lim\limits_{x \to x_o} f(x) = l$, $\exists \delta_{1>o}$ tal que si :

$$0 < |x - x_o| < \delta_1 \text{ entonces } |f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (*)$$

por ser $\lim\limits_{x \to x_o} h(x) = l$, $\exists \delta_{2>o}$ tal que si :

$$0 < |x - x_o| < \delta_2 \text{ entonces } |h(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (**)$$

luego, tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$, si $0 < |x - x_o| < \delta$ entonces de (1) tendremos que:

$$|g(x) - l| \leqslant |h(x) - l| + 2\,|f(x) - l| < \frac{\varepsilon}{2} + 2 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

de donde:

$$\lim_{x \to x_o} g(x) = l$$

Example 40 *Demuestra que* $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x}{x} = 1$

Demostración:
Si $x > 0 \to 0 < \sin x < x < \tan x \to \dfrac{1}{\tan x} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\sin x}$
Multiplicando esta desigualdad por $sinx$ ($sinx > 0$) tendremos:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\sin x}{\tan x} & < & \dfrac{\sin x}{x} < 1 \\ & \Updownarrow & \\ \dfrac{1}{\cos x} & < & \dfrac{\sin x}{x} < 1 \end{array}$$

Si $x < 0 \to \tan x < x < \sin x \to \dfrac{1}{\sin x} < \dfrac{1}{x} < \dfrac{1}{\tan x}$
Multiplicando esta desigualdad por $sinx$ ($sinx < 0$) tendremos:

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{\sin x}{\tan x} & < & \dfrac{\sin x}{x} < 1 \\ & \Updownarrow & \\ \dfrac{1}{\cos x} & < & \dfrac{\sin x}{x} < 1 \end{array}$$

En definitiva; hemos comprobado que en un entorno abierto y reducido del cero, la función $f(x) = \dfrac{\sin x}{x}$ verifica que $g(x) < f(x) < h(x)$ siendo $g(x) = \dfrac{1}{\cos x}$ y $h(x) = 1$

Como además $\lim_{x\to 0} g(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ y $\lim_{x\to 0} h(x) = 1$; entonces podemos afirmar que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Example 41 *Demuestra que* $\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$

Demostración:
Si $x > 0 \to 0 < \sin x < x < \tan x \to \frac{1}{\tan x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\sin x}$
Multiplicando esta desigualdad por $\tan x$ $(\tan x > 0)$ tendremos:

$$\begin{array}{rcl} 1 & < & \frac{\tan x}{x} < \frac{\tan x}{\sin x} \\ & \Updownarrow & \\ 1 & < & \frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos x} \end{array}$$

Si $x < 0 \to \tan x < x < \sin x \to \frac{1}{\sin x} < \frac{1}{x} < \frac{1}{\tan x}$
Multiplicando esta desigualdad por $\tan x$ $(\tan x < 0)$ tendremos:

$$\begin{array}{rcl} 1 & < & \frac{\tan x}{x} < \frac{\tan x}{\sin x} \\ & \Updownarrow & \\ 1 & < & \frac{\tan x}{x} < \frac{1}{\cos x} \end{array}$$

En definitiva; hemos comprobado que en un entorno abierto y reducido del cero, la función $f(x) = \frac{\tan x}{x}$ verifica que $g(x) < f(x) < h(x)$ siendo $g(x) = 1$ y $h(x) = \frac{1}{\cos x}$.

Como además $\lim_{x\to 0} h(x) = \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x} = 1$ y $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$; entonces podemos afirmar que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\tan x}{x} = 1$$

1.6 Infinitésimos

Definition 42 *Una función, f, se dice que es un infinitésimo en un punto x_o, si su límite en dicho punto es cero.*

$$f \text{ infinitésimo en } x_0 \Longleftrightarrow \lim_{x\to x_o} f(x) = 0$$

Example 43 $f(x) = sinx$ *es un infinitésimo en* $x = 0$; *ya que* $\lim_{x\to 0} \sin x = 0$
$f(x) = \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ *es un infinitésimo en* $x = \frac{\pi}{4}$; *ya que* $\lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \tan\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
$f(x) = 1 - \cos x$ *es un infinitésimo en* $x = 0$; *ya que* $\lim_{x\to 0} (1 - \cos x) = 0$
$f(x) = 3^x - 1$ *es un infinitésimo en* $x = 0$; *ya que* $\lim_{x\to 0} (3^x - 1) = 0$

$f(x) = \sqrt[3]{1+x} - 1$ *es un infinitésimo en* $x = 0$*; ya que* $\lim_{x\to 0}\left(\sqrt[3]{1+x} - 1\right) = 0$
$f(x) = \arctan x - \frac{\pi}{4}$ *es un infinitésimo en* $x = 1$*; ya que* $\lim_{x\to 1}\left(\arctan x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$
$f(x) = x$ *es un infinitésimo en* $x = 0$*; ya que* $\lim_{x\to 0} x = 0$

Definition 44 *Dos infinitésimos* f *y* g*,en un mismo punto* x_o *,se dice que son infinitésimos del mismo orden, cuando* $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = k \neq 0$

Nota: La función $f(x) = x^n$ con $n \in N \sim \{0\}$ es un infinitésimo de orden n

Example 45 $f_1(x) = x^2,\ f_2(x) = -5x^2, f_3(x) = \frac{3}{2}x^2$*son infinitésimos, en* $x = 0$*,de orden 2*
$f_1(x) = x^3,\ f_2(x) = -5x^3, f_3(x) = \frac{3}{2}x^3$*son infinitésimos, en* $x = 0$*, de orden 3*

Definition 46 *Dos infinitésimos* f *y* g*,en un mismo punto* x_o *,se dice que son infinitésimos equivalentes, cuando* $\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$

$$\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right] = 1 \Longleftrightarrow f(x) \sim g(x)$$

Example 47 $f_1(x) = x,\ f_2(x) = \sin x$ *son infinitésimos equivalentes, en* $x = 0$ *ya que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$$

$f_1(x) = x,\ f_2(x) = \tan x$ *son infinitésimos equivalentes, en* $x = 0$ *ya que*

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x}{x} = 1$$

Theorem 48 *Cuando, en un límite, un infinitésimo esté multiplicando o dividiendo se le puede sustituir por otro equivalente.*

Proof. Supongamos que, en x_0 $\qquad f(x) \sim g(x) \Leftrightarrow \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)} = 1$
Y supongamos que deseamos calcular un límite en el que aparece $f(x)$ multiplicando o dividiendo:

$$\lim_{x\to x_o} f(x)\cdot h(x) = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot g(x)\cdot h(x) = \lim_{x\to x_o}\frac{f(x)}{g(x)}\cdot \lim_{x\to x_o}(g(x)\cdot h(x)) = \lim_{x\to x_o}(g(x)\cdot h(x))$$

■

Esto es, hemos sustituido $f(x)$ *por* $g(x)$ y probablemente el nuevo límite sea más sencillo de calcular

Proposition 49 *La suma de varios infinitésimos de distinto orden se puede reducir al de menor orden*

$$\lim_{x\to 0}\frac{(x^2 + x^3 + x^7)f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to 0}\frac{x^2 f(x)}{g(x)}$$

Ejemplo: Calcular $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} = \dfrac{0}{0}$

Como $1-\cos x = 2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{2\sin^2\left(\dfrac{x}{2}\right)}{3x^2}$

$\sin x \sim x$ cuando $x \to 0$

Entonces, $\sin\left(\dfrac{x}{2}\right) \sim \dfrac{x}{2}$ cuando $x \to 0$

Con lo que:

$\lim_{x\to 0} \dfrac{2\left(\dfrac{x}{2}\right)^2}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{6x^2} = \dfrac{1}{6}$

Otra manera de calcular este límite

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} = \dfrac{0}{0}$

$\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos x)(1+\cos x)}{3x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\left(1-\cos^2 x\right)}{3x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{\sin^2 x}{3x^2(1+\cos x)} =$ [14]

$= \lim_{x\to 0} \dfrac{x^2}{3x^2(1+\cos x)} = \lim_{x\to 0} \dfrac{1}{3(1+\cos x)} = \dfrac{1}{3\cdot 2} = \dfrac{1}{6}$

Infinitésimos más frecuentes cuando $z \to 0$ Trigonométricos

$\sin z \sim z$ $\quad \arcsin z \sim z$

$\tan z \sim z$ $\quad \arctan z \sim z$

$1-\cos z \sim \dfrac{z^2}{2}$

Exponenciales, logarítmicos, potencias y raíces

$$\begin{aligned}
z &\sim \ln(1+z) \\
e^z - 1 &\sim z \\
a^z - 1 &\sim z\ln a \\
\sqrt[n]{1+z} - 1 &\sim \frac{1}{n}\cdot z \\
(1+z)^n - 1 &\sim n\cdot z
\end{aligned}$$

[14] $\sin x \sim x$ cuando $x \to 0$
Entonces, $\sin^2 x \sim x^2$ cuando $x \to 0$

Ejercicios de límites por infinitésimos

Exercise 1.6.1 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin^2 3x}{5x^2}=\dfrac{0}{0}$

$\sin 3x \sim 3x$ cuando $x \to 0$. Por lo que:
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin^2 3x}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(3x)^2}{5x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{9x^2}{5x^2}=\frac{9}{5}$$

Exercise 1.6.2 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 5x}{7x^2}=\dfrac{0}{0}$

$$1-\cos A = 2\sin^2\left(\frac{A}{2}\right)$$
$$1-\cos 5x = 2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)$$
$$\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 5x}{7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{7x^2}$$
$\sin 5x \sim 5x$ cuando $x \to 0$. Por lo que:
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\sin^2\left(\frac{5x}{2}\right)}{7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\left(\frac{5x}{2}\right)^2}{7x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{25x^2}{14x^2}=\frac{25}{14}$$

Exercise 1.6.3 $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\dfrac{0}{0}$

Realizamos un cambio de variable
Si $x-1=z$;entonces $x=1+z$
Además $(x\to 1)\Leftrightarrow(z\to 0)$
Con lo que:
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\lim_{z\to 0}\frac{\sqrt[3]{8+z}-2}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{2\left(\frac{\sqrt[3]{8+z}-2}{2}\right)}{z}=$$
$$=\lim_{z\to 0}\frac{2\left(\sqrt[3]{\frac{8+z}{8}}-1\right)}{z}=\lim_{z\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{z}{8}}-1\right)}{\frac{z}{2}}$$
$\sqrt[3]{1+\frac{z}{8}}-1\sim\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{8}$ cuando $z\to 0$. Con lo que:
$$\lim_{z\to 0}\frac{\left(\sqrt[3]{1+\frac{z}{8}}-1\right)}{\frac{z}{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{z}{8}}{\frac{z}{2}}=\lim_{z\to 0}\frac{z}{12z}=\frac{1}{12}$$
Nota: Otra manera de calcular este límite sin utilizar infinitésimos.
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\frac{0}{0}$$
$$\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{x+7}-2}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{\left(\sqrt[3]{x+7}\right)^3-2^3}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}=\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{(x-1)\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}$$
Utilizando el teorema de cancelación, tendremos:
$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{\left(\sqrt[3]{(x+7)^2}+2\sqrt[3]{x+7}+4\right)}=\frac{1}{\sqrt[3]{8^2}+2\sqrt[3]{8}+4}=\frac{1}{12}$$

Exercise 1.6.4 $\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}\right) = \dfrac{\ln 1}{0} = \dfrac{0}{0}$

Realizamos un cambio de variable
Si $x-2=z$;entonces $x=2+z$
Además $(x\to 2)\Leftrightarrow(z\to 0)$
Con lo que:
$\lim_{x\to 2}\left(\dfrac{\ln(x-1)}{x-2}\right) = \lim_{z\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+z)}{z}\right)$
Como $z\sim\ln(1+z)$ cuando $z\to 0$, entonces:
$\lim_{z\to 0}\left(\dfrac{\ln(1+z)}{z}\right)=\lim_{z\to 0}\dfrac{z}{z}=1$

Exercise 1.6.5 $\lim_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}=\dfrac{0}{0}$
Como $x\ln 3\sim 3^x-1$ cuando $x\to 0$
$\lim_{x\to 0}\dfrac{3^x-1}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{x\ln 3}{x}=\ln 3$

Exercise 1.6.6 $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1}=\dfrac{0}{0}$
Si $x-1=z$;entonces $x=1+z$
Además $(x\to 1)\Leftrightarrow(z\to 0)$
Con lo que:
$\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim_{z\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+z}-1}{\sqrt{1+z}-1}$
$\sqrt[3]{1+z}-1\sim\dfrac{z}{3}$ y $\sqrt{1+z}-1\sim\dfrac{z}{2}$ cuando $z\to 0$
$\lim_{z\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+z}-1}{\sqrt{1+z}-1}=\lim_{z\to 0}\dfrac{\frac{z}{3}}{\frac{z}{2}}=\lim_{z\to 0}\dfrac{2z}{3z}=\dfrac{2}{3}$

Exercise 1.6.7 $\lim_{x\to 2}\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-1}{x-2}=\dfrac{0}{0}$
Si $x-2=z$;entonces $x=2+z$
Además $(x\to 2)\Leftrightarrow(z\to 0)$
Con lo que:
$\lim_{x\to 2}\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{x-2}-1}{x-2}=\lim_{z\to 0}\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{z}-1}{z}$
Como $z\ln\left(\dfrac{1}{3}\right)\sim\left(\dfrac{1}{3}\right)^{x}-1$ cuando $z\to 0$. Entonces:
$\lim_{z\to 0}\dfrac{\left(\frac{1}{3}\right)^{z}-1}{z} = \lim_{z\to 0}\dfrac{z\ln\left(\frac{1}{3}\right)}{z}=\ln\left(\tfrac{1}{3}\right) = -\ln 3$

Exercise 1.6.8 $\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x} = \dfrac{0}{0}$

Como $(1+x)^n-1\sim n\cdot x$ cuando $x\to 0$
$\lim_{x\to 0}\dfrac{(1+x)^n-1}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{nx}{x} = n$

1.7 Límites en el infinito

a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ (*un número* real)

Definición $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists k > 0\ /\text{si} \begin{bmatrix} x > K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists k > 0\ /\text{si} \begin{bmatrix} x \in (k, +\infty) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Si $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l$ la recta $y = l$ es una asíntota horizontal de la función (por la derecha)

b) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ (*un número* real)

Definición $\lim_{x\to+\infty} f(x) = l \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists k > 0\ /\text{si} \begin{bmatrix} x < -K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow |f(x) - l| < \varepsilon$

$\Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0\ \exists k > 0\ /\text{si} \begin{bmatrix} x \in (-\infty, -k) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (l - \varepsilon, l + \varepsilon)$

Si $\lim_{x\to-\infty} f(x) = l$ la recta $y = l$ es una asíntota horizontal de la función (por la izquierda)

c) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

Definición $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0\ /\text{si} \begin{bmatrix} x > K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} x > K \Rightarrow f(x) > M$

$\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0\ /\text{si} \begin{bmatrix} x \in (k, +\infty) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (M, +\infty)$

d) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$

Definición $\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0\ /\text{si} \begin{bmatrix} x > K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) < -M$

$\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0\ /\text{si} \begin{bmatrix} x \in (k, +\infty) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (-\infty, -M)$

e) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$

Definición $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0\ /\text{si} \begin{bmatrix} x < -K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) > M$

$\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0\ /\text{si} \begin{bmatrix} x \in (-\infty, -k) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (M, +\infty)$

f) $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

Definición $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0\ /\text{si} \begin{bmatrix} x < -K \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow$ $f(x) < -M$

$\Leftrightarrow \forall M > 0\ \exists k > 0\ /\text{si} \begin{bmatrix} x \in (-\infty, -k) \\ y \\ x \in D(f) \end{bmatrix} \Rightarrow f(x) \in (-\infty, M)$

g) No existan $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ o $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

Chapter 2

Continuidad

2.1 Definiciones

Definition 50 *Función continua a la izquierda de un punto*

Sea f una función definida en un intervalo I y sea $x_0 \in I$.Diremos que la función f es continua a la izquierda de x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Definition 51 *Función continua a la derecha de un punto*

Sea f una función definida en un intervalo I y sea $x_0 \in I$.Diremos que la función f es continua a la derecha de x_0 si

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

Definition 52 *Función continua en un punto*[1]

Sea f una función definida en un intervalo I y sea $x_0 \in I$.Diremos que la función f es continua en un punto x_0 si f lo es a la izquierda y a la derecha de x_0. Esto equivale a afirmar que se verifican las siguientes condiciones:
1) $x_0 \in D(f)$ $(\exists\ f(x_0))$
2) $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$
3) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

Definition 53 *Función continua en un punto (topológica)*

Decir que f es continua en x_0 es equivalente a las siguientes definiciones

---

[1] f es continua en $x_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{x \to x_0} (f(x) - f(x_0)) = 0$
Si $x = x_0 + h$ entonces decir que $x \to x_0 \Longleftrightarrow h \to 0$; por lo que otra definición equivalente sería:
f es continua en $x_0 \Longleftrightarrow \lim\limits_{h \to 0} (f(x_0 + h) - f(x_0)) = 0$

1)$\forall\xi > 0 \; \exists \; \delta > 0 \diagup$ si $\left[\begin{array}{c} |x - x_0| < \delta \\ y \\ x \in D(f) \end{array} \right]$ entonces $|f(x) - f(x_0)| < \xi$
2)$\forall\xi > 0 \; \exists \; \delta > 0 \diagup$ si $x \in E_\delta(x_0) \cap D(f)$ entonces $f(x) \in E_\xi(f(x_0))$
3)$\forall\xi > 0 \; \exists \; \delta > 0 \diagup$ si $x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\cap D(f)$ entonces $f(x) \in \left]f(x_0) - \xi, f(x_0) + \xi\right[$

Definition 54 *Función continua en un intervalo cerrado* $[a, b]$

f es continua en $[a, b]$ si f lo es en $]a, b[$ y; además lo es a la derecha de a y a la izquierda de b

Remark 1 *Función discontinua en un punto*

Es evidente que una función no será continua cuando fallen alguna de las tres condiciones dadas en la Definition 5. Según esto; vamos a clasificar las discontinuidades de una función en un punto

2.2 Discontinuidades

Definition 55 *Discontinuidad de primera especie (salto finito)*

Diremos que una función presenta para x_0 una discontinuidad de primera especie cuando se verifique
$\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$ sea distinto del $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ (independientemente de que exista o no $f(x_0)$)
También se dice que la función presenta una discontinuidad de salto finito en x_0.

Definition 56 *Discontinuidad evitable*

Diremos que una función presenta para x_0 una discontinuidad evitable en los siguientes casos:

1. $\exists f(x_0)$ y $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ pero no coinciden

2. No existe $f(x_0)$ y $\exists \lim\limits_{x \to x_0} f(x)$

Se denominan así, porque asignando a $f(x_0)$ el valor del $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ la función ya sería continua en x_0

Definition 57 *Discontinuidad de segunda especie (salto infinito)*

Si al menos uno de los límites $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x)$, $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x)$ no existe o es $\pm\infty$

2.3 Operaciones con funciones continuas

Theorem 58 *Si f y g son continuas en x_0 entonces:*

1. $\alpha f + \beta g$ es continua en x_0 $\forall \alpha, \beta \in R$ (cualquier c. lineal de funciones continuas es continua)

2. $f \cdot g$ es continua en x_0

Theorem 59 *Si f y g son continuas en x_0 y además $g(x_0)$ no es nula entonces $\frac{f}{g}$ es continua en x_0*

Theorem 60 *Si f es continua en x_0 y g es continua en $f(x_0)$ entonces $g \circ f$ es continua en x_0*

2.4 Discontinuidad de algunas funciones

1. Las funciones polinómicas son continuas en R

2. Las funciones racionales (cociente de polinomios) son discontinuas en los puntos que no pertenecen a su dominio de definición (los que anulan el denominador)

3. Las funciones irracionales son discontinuas en los puntos que no pertenecen a su dominio

4. Las funciones de la forma $y = a^{f(x)}$ son continuas para aquellos valores que pertenezcan al $D(f)$

5. Las funciones de la forma $y = Ln\ f(x)$ son continuas en el conjunto $\{x \in R \ / \ f(x) > 0\}$

6. las funciones de la forma $y = \sin f(x)$ son continuas para aquellos valores que pertenezcan al $D(f)$

7. Las funciones de la forma $y = \tan f(x)$ son discontinuas en el siguiente conjunto

$$\left\{x \in D(f) \ / \ f(x) = \frac{\pi}{2} + k\pi \text{ siendo } k \in Z\right\}$$

2.5 Propiedades de las funciones continuas en un punto

Theorem 61 *<u>Teorema del signo</u>. Si una función es continua en un punto x_0 y además $f(x_0)$ es no nula; entonces, siempre podremos encontrar un entorno abierto de centro x_0 y radio tan pequeño como queramos en el que la función tenga el mismo signo que $f(x_0)$*

<u>Demostración</u> Casos:

- $f(x_0) > 0$

Por ser f continua en x_0,sabemos que dado cualquier $\xi > 0$ (tan pequeño como queramos) siempre podemos encontrar un $\delta > 0$(que depende del ξ elegido) de tal manera que si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ entonces $f(x) \in]f(x_0) - \xi, f(x_0) + \xi[$

Al ser $f(x_0) > 0$, siempre podremos considerar el ξ de tal manera que $f(x_0) > \xi$, con lo que $\boxed{0 <} f(x_0) - \xi < \boxed{f(x)} < f(x_0) + \xi$

Así pues, queda demostrado que existe un entorno de centro x_0 y radio δ en el cual $f(x)$ es positiva (basta con considerar el ξ / $f(x_0) > \xi$)

- $f(x_0) < 0$

Demuéstralo tú como ejercicio

Theorem 62 *Relación entre continuidad y acotación (localmente). Si una función es continua en un punto x_0 entonces, siempre podremos encontrar un entorno abierto de centro x_0 y radio tan pequeño como queramos en el que la función esté acotada*

Demostación

Por ser f continua en x_0,sabemos que dado cualquier $\xi > 0$ (tan pequeño como queramos) siempre podemos encontrar un $\delta > 0$(que depende del ξ elegido) de tal manera que si $x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ entonces $f(x) \in]f(x_0) - \xi, f(x_0) + \xi[$

En particular, si consideramos $\xi = 1$, entonces

$$f(x_0) - 1 < f(x) < f(x_0) + 1 \text{ si } x \in]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$$

Acabamos de demostrar que $f(x_0)+1$ es cota superior de f en $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ y que $f(x_0) - 1$ es cota inferior de f en $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Por lo tanto, f está acotada en $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$

Theorem 63 *Si f es continua en x_0 y toma valores de distinto signo en todo entorno de x_0, entonces $f(x_0) = 0$*

Demuestra como ejercicio este teorema

2.6 Propiedades de las funciones continuas en un cerrado

Theorem 64 *de Bolzano*[2]

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos $(f(a) \cdot f(b) < 0)$, entonces existe, al menos, un punto $x_0 \in]a, b[$ tal que $f(x_0) = 0$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si una función es continua en $[a, b]$ y toma valores de distinto signo en los extremos, entonces podemos garantizar la existencia de un punto de la gráfica (cuya abcisa pertenece al $]a, b[$), al menos, que corta al eje de las abcisas

Theorem 65 *de los valores intermedios (Teorema de Darboux)*

[2] Por su complejidad, no lo demostraremos

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $f(a)$ es distinta de $f(b)$, entonces la función f toma todos los valores comprendidos entre $f(a)$ y $f(b)$ al menos una vez en $]a,b[$

Demostración

Sea $k \in R$ tal que $f(a) < k < f(b)$.

Definimos la función $H(x) = f(x) - k$ que es continua en $[a,b]$ por ser combinación lineal de dos funciones continuas

Como $H(a) = f(a) - k < 0$ y $H(b) = f(b) - k > 0$, se puede aplicar el Teorema de Bolzano a la función H; por lo que podemos afirmar que existe, al menos, un $x_0 \in]a,b[$ tal que $H(x_0) = 0$. Esto es

$H(x_0) = f(x_0) - k = 0 \rightarrow \boxed{f(x_0) = k}$

INTERPRETACIÓN GEOMÉTRICA

Si una función es continua en $[a,b]$ y k es tal que $f(a) < k < f(b)$ (ó $f(b) < k < f(a)$) entonces podemos garantizar la existencia de un $x_0 \in]a,b[$ tal que $f(x_0) = k$ (su imagen coincide con k)

Theorem 66 *de acotación en* $[a,b]$ [3]

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$, entonces f está acotada en $[a,b]$

Theorem 67 *de Weierstrass*

Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$,entonces

1. $\exists\ x_0 \in [a,b]\ /\ f(x_0) \geq f(x)\ \forall x \in [a,b]$ (P($x_0, f(\ x_0)$) máximo absoluto de f en $[a,b]$)
2. $\exists\ x_1 \in [a,b]\ /\ f(x_1) \leq f(x)\ \forall x \in [a,b]$ (P($x_1, f(\ x_1)$) mínimo absoluto de f en $[a,b]$)

Demostración Como f es continua en $[a,b]$, entonces por el teorema anterior f está acotada en $[a,b]$

1. Casos:

- Sea $M = \sup\{f(x)/x \in [a,b]\}$[4]$\rightarrow f(x) \leq M\ ;\ \forall x \in [a,b]$

Supongamos que el máximo de f en $[a,b]$ no se alcanza en el susodicho intervalo, entonces se verificará $f(x) < M\ ;\ \forall x \in [a,b]$

Definimos la función

$H(x) = \dfrac{1}{M - f(x)}$; por definición $H(x) > 0\ \forall x \in [a,b]$

Además H es continua en $[a,b]$ por ser división de funciones continuas (ya que el denominador no se anula). En virtud del teorema de acotación, podemos afirmar que H está acotada en $[a,b]$.

Si está acotada , lo estará superiormente y por consiguiente:

$$\exists\ k \in R^+\ /\ H(x) < k \Longrightarrow \frac{1}{M - f(x)} < k \Longrightarrow f(x) < M - \frac{1}{k}$$

[3] Por su complejidad, no lo demostraremos

[4] Existe por el axioma del supremo, que dice:
Todo subconjunto de números reales acotado superiormente tiene supremo (la más pequeña de las cotas superiores)

Luego $M - \dfrac{1}{k}$ es una cota superior de f en $[a, b]$ y además menor que M. Esto contradice la hipótesis de que M es el supremo

Así pues, lo que hemos supuesto es falso y por lo tanto podemos afirmar que $\exists\ x_0 \in [a, b]\ /\ f(x_0) = M \rightarrow$(P($x_0, f($ x_0)) máximo absoluto de f en $[a, b]$)

- Sea $m = \inf \{f(x)/x \in [a, b]\}$[5]$\rightarrow f(x) \geq m$; $\forall x \in [a, b]$

Supongamos que el mínimo de f en $[a, b]$ no se alcanza en el susodicho intervalo, entonces se verificará $f(x) > m$; $\forall x \in [a, b]$

Definimos la función

$H(x) = \dfrac{1}{m - f(x)}$; por definición $H(x) < 0\ \forall x \in [a, b]$

Además H es continua en $[a, b]$ por ser división de funciones continuas (ya que el denominador no se anula).En virtud del teorema de acotación, podemos afirmar que H está acotada en $[a, b]$.

Si está acotada , lo estará inferiormente y por consiguiente

$\exists\ k \in R^-\ /\ H(x) > k \Longrightarrow \dfrac{1}{m - f(x)} > k \Longrightarrow f(x) > m - \dfrac{1}{k}$

Luego $m - \dfrac{1}{k}$ es una cota inferior de f en $[a, b]$ y además mayor que m. Esto contradice la hipótesis de que m es el ínfimo.

Así pues, lo que hemos supuesto es falso y por lo tanto podemos afirmar que $\exists\ x_1 \in [a, b]\ /\ f(x_1) = m \rightarrow$(P($x_1, f($ x_1)) mínimo absoluto de f en $[a, b]$)

Remark 2 *Toda función continua f en $[a, b]$ tiene la propiedad siguiente:*

$\boxed{\text{" transforma intervalos cerrados en intervalos cerrados "}}$

$$f([a, b]) = [m, M] \text{ donde } m = \min \{f(x)/x \in [a, b]\} \text{ y }$$
$$M = \max \{f(x)/x \in [a, b]\}$$

Corollary 68 *Si f es una función continua en el intervalo cerrado $[a, b]$;m no coincide con M* [6]*y además $k \in R\ /\ m < k < M$, entonces podemos garantizar la existencia de, al menos, un $x_0 \in [a, b]$ tal que $f(x_0) = k$ (su imagen coincide con k)*

Este corollary se puede demostrar facilmente utilizando los teoremas de Darboux y Weierstrass. Demuéstralo

[5]Existe por el axioma del ínfimo, que dice:
Todo subconjunto de números reales acotado inferiormente tiene ínfimo (la más grande de las cotas inferiores)

[6]$m = \min \{f(x)/x \in [a, b]\}$ y $M = \max \{f(x)/x \in [a, b]\}$

2.7 Problemas continuidad

Exercise 2.7.1 *Halla el dominio de continuidad de la siguientes funciones:*

$$y = \frac{x+1}{x^2+1} \qquad y = \frac{2}{|x|-1}$$

$$y = \frac{2x-1}{2x^2-5x+2} \qquad y = \frac{2}{|x|^2-1}$$

$$y = \frac{x-1}{x^4-3x^3+6x+4} \qquad y = \frac{x}{\cos x}$$

$$y = \sqrt{2x^2-5x-2} \qquad y = \frac{x}{\ln x}$$

$$y = \sqrt{\frac{x+1}{x-3}} \qquad y = \frac{x^2}{1-\cos x}$$

Exercise 2.7.2 *Estudia la continuidad de las siguientes funciones*

$$f(x) = \frac{x}{senx} \qquad f(x) = \ln(\cos x)$$

$$f(x) = \frac{3}{1-\tan x} \qquad f(x) = \sqrt{4-x^2}$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3x-9}{x^2-5x+6} & \text{si } x \neq 3 \\ 3 & x = 3 \end{cases} \qquad f(x) = \tan(x^2-5x+4)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{|3x-9|}{x-3} & \text{si } x \neq 3 \\ 0 & x = 3 \end{cases} \qquad f(x) = x^2E\left[x\right]$$

$$f(x) = xE\left[x^2\right]$$

Exercise 2.7.3 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & si\ x < 1 \\ x-1 & si\ 1 \leq x < 3 \\ 1 & si\ x = 3 \\ x^2-7 & si\ x > 3 \end{cases}$ *. Halla sus tipos de discontinuidad indicando de qué tipo son*

Exercise 2.7.4 *Estudia la continuidad de la función* $f(x) = x - E(x)$

Exercise 2.7.5 *Estudia la continuidad de la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{e^x}{e^x+1} & si\ x \leq 0 \\ x^2+1 & si\ x > 0 \end{cases}$

Exercise 2.7.6 [7] *Estudia la continuidad de la función* $f(x) = \dfrac{x^3-\tan x}{x+\tan x}$ *en el intervalo* $]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}[$. *Redefine la función para que sea continua en ese intervalo*

[7] Este ejercicio lo podrás resolver cuando estudies L'Hopital

Exercise 2.7.7 *¿Cuáles de las siguientes funciones son continuas en el entorno de* $x = 0$*?*

$a)\ f(x) = 2^x \qquad\qquad b)\ f(x) = \begin{cases} -x & si\ x \le 0 \\ \ln x & si\ x > 0 \end{cases}$

Exercise 2.7.8 *Dada la función* $f(x) = 3x - 2$ *demuestra, utilizando la definición topológica, que es continua para* $x = 2$

Exercise 2.7.9 *Dada la función* $f(x) = x^2 - 2x + 1$ *demuestra, utilizando la definición topológica, que es continua para* $x = 1$

Exercise 2.7.10 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2 - 3x + 2}$ *determina los valores para los cuales es continua. Clasifica las discontinuidades*

Exercise 2.7.11 *Sea una función* $f(x)$ *continua para* $x = a$ *tal que* $f(a) = 0$ *y sea* $g(x)$ *una función que está acotada en un entorno reducido de* a*. Demuestra que si existe* $g(a)$ *entonces la función producto*$(\ f \cdot g)$[8] *es continua para* $x = a$

Exercise 2.7.12 *Sea* $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1 & si\ x \le 3 \\ 3x + 2 & si\ x > 3 \end{cases}$ *Determinar si la función es continua, para* $x = 3$*, calculando sus límites laterales y su imagen*

Exercise 2.7.13 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{x+1}{x^2 - 3x + 2}$*, determina si es continua para* $x = 3$ *calculando* $\lim\limits_{h \to 0} (f(3 + h) - f(3))$

Exercise 2.7.14 *Sea* $f(x) = \begin{cases} 3x + 4 & si\ x < -1 \\ \dfrac{1}{x} & si\ -1 \le x < 0 \\ \dfrac{1}{x-3} & si\ x \ge 0 \end{cases}$

Determinar los valores para los cuales es continua. Clasifica las discontinuidades

Exercise 2.7.15 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \frac{5x^3+3x^2}{kx^2} & si\ x\ no\ es\ cero \\ -3 & si\ x = 0 \end{cases}$ *determina* k *para que la función sea continua para* $x = 0$

Exercise 2.7.16 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \frac{x^3-7x^2+15x-9}{x^3-5x^2+3x+9} & si\ x < 3 \\ mx + 5 & si\ x \ge 3 \end{cases}$ *determina* m *para que la función sea continua para* $x = 3$

Exercise 2.7.17 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{2x^2 - x - 1}{x^2 + mx - 1}$ *Hallar* m *sabiendo que la función no es continua para* $x = 1$*. Después clasifica sus discontinuidades*

Exercise 2.7.18 *Hallar* a *y* b *de modo que la siguiente función* $f(x) = \begin{cases} a(x-1)^2 & para & x < 0 \\ sin(b + x) & para & 0 < x < \\ \dfrac{\pi}{x} & para & x > \pi \end{cases}$ *sea continua*

[8] $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$

Exercise 2.7.19 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 & si \quad x < 0 \\ ax + b & si \quad 0 \leq x < 1 \\ 2 & si \quad x \geq 1 \end{cases}$ *. Hallar a y b para que la función ssea continua*

Exercise 2.7.20 *Se considera la función* $f(x) = \begin{cases} \ln x & si \quad 0 < x < 1 \\ ax^2 + b & si \quad 1 \leq x \end{cases}$. *Determina los valores de a y b para que la función sea continua y* $f(2) = 3$

Exercise 2.7.21 *Calcula los valores que deben tener a y b para que* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{ax} & si \quad x < 0 \\ 2 & si \quad x = 0 \\ \dfrac{1 - \cos x}{bx^2} & si \quad x > 0 \end{cases}$ *sea continua en* $\Re$

Exercise 2.7.22 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{x-2}{x+1}$ *y el intervalo* $I =]-2, 1[$. *Halla* $f(I)$ *y* $f^{\ -1}(I)$

Exercise 2.7.23 *Dada la función* $f(x) = -x^2 - x + 6$ *y los intervalos* $I =]-2, 1[$ *y* $I = [-2, 1]$ *. Determina :*

$f(I) \not{y}\ f(J)$, $f^{-1}(4)$ *y* $f(]0, 4[)$

Exercise 2.7.24 *Dada la ecuación* $0 = x^3 + x - 5$, *demuestra que existe al menos una solución real comprendida entre* 1 *y* 2.*Determínala con una cifra decimal exacta (Aplica el teorema de Bolzano a la función* $f(x) = x^3 + x - 1$ *en el intervalo*$[1, 2]$*; después divide este intervalo en diez partes iguales y...)*

Exercise 2.7.25 *Si* $f(x) = x^2 + 2x + 1$. *¿Existe un entorno de* $x = 3$ *en el que la función esté acotada por 15 y 17?*

Exercise 2.7.26 *Dada la ecuación* $0 = x^3 + x - 1$, *demuestra que existe una solución real comprendida entre* 0 *y* 1.*Determínala con una cifra decimal exacta (Aplica el teorema de Bolzano a la función* $f(x) = x^3 + x - 1$ *en el intervalo*$[0, 1]$*; después divide este intervalo en diez partes iguales y...)*

Exercise 2.7.27 *Dada la ecuación* $x^3 = x^2 + 1$,*demuestra que existe una solución, al menos, en el intervalo* $[1, 2]$.*Determínala con dos cifras decimales exactas (Aplica el teorema de Bolzano a la función* $f(x) = x^3 - x^2 - 1$ *en el intervalo* $[1, 2]$;*después divide este intervalo en....)*

Exercise 2.7.28 *Demuestra que la ecuación* $\cos x = 2x - 1$ *tiene al menos una solución en* $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$

Exercise 2.7.29 *Demuestra que la ecuación* $\cos x = x$ *tiene al menos una solución en* $[0, 1]$. *Determínala con dos cifras decimales exactas*

Exercise 2.7.30 *La función* $f(x) = x^2 + 2x - 1$ *¿toma todos los valores comprendidos entre 7 y 14?. ¿Y entre -4 y 3?. Indica en qué teoremas te basas*

Exercise 2.7.31 *Invéntate una función que sea continua en* $]0,1]$ *y que sin embargo no tenga máximo en ese intervalo. Contradice este ejemplo el teorema de Weierstrass*

Exercise 2.7.32 *Invéntate una función que sea continua en* $]a,b[$ *y que sin embargo no tenga máximo ni mínimo en ese intervalo. Contradice este ejemplo el teorema de Weierstrass*

Exercise 2.7.33 *Sean* f *y* g *dos funciones continuas en* $[a,b]$, *tales que* $f(a) > g(a)$ *y* $f(b) < g(b)$.*Demuestra que* $\exists c \in [a,b]/f(c) = g(c)$

Exercise 2.7.34 *Sea* f *una función continua en* $[0,1]$ *y* $0 \leq f(x) \leq 1$. *Demuestra que existe al menos un punto* $x_0 \in [0,1]$ *tal que* $f(x_0) = x_0$

Exercise 2.7.35 *Sea* f *una función continua en* $[0,1]$, *tal que* $f(x)$ *es racional y* $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$.
Demuestra que la función f *es constante, siendo* $f(x) = \frac{1}{2}\ \forall x \in [0,1]$

Exercise 2.7.36 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x<3 \\ 5 & x=3 \\ 2x+4 & x>3 \end{cases}$
Estudia su continuidad para $x = 3$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 2.7.37 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x<3 \\ 2x+4 & x>3 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 3$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo*

Exercise 2.7.38 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} 3x+1 & x\leq 3 \\ 2x+4 & x>3 \end{cases}$
Estudia su continuidad para $x = 3$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 2.7.39 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & x\neq 1 \\ 5 & x=1 \end{cases}$
Estudia su continuidad para $x = 1$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 2.7.40 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x+1}{x-1} & x\neq 1 \\ 0 & x=1 \end{cases}$
Estudia su continuidad para $x = 1$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 2.7.41 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{2}{(x-2)^2}$
Estudia su continuidad para $x = 2$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*
¿Existe alguna asíntota vertical?

Exercise 2.7.42 *Dada la función* $f(x) = \dfrac{-3}{(x-2)^2}$
Estudia su continuidad para $x = 2$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*
¿Existe alguna asíntota vertical?

Exercise 2.7.43 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x} & x < 0 \\ \dfrac{1}{x} & x > 0 \end{cases}$
Estudia su continuidad para $x = 0$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*
¿Existe alguna asíntota vertical?

Exercise 2.7.44 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-3} & x < 3 \\ \dfrac{-1}{x-3} & x > 3 \end{cases}$
Estudia su continuidad para $x = 3$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*
¿Existe alguna asíntota vertical?

Exercise 2.7.45 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 3 \\ 2x+1 & x > 3 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 3$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 2.7.46 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x-1 & x < 3 \\ 5 & x = 3 \\ 2x+1 & x > 3 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 3$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 2.7.47 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{-1}{x-5} & x < 5 \\ 3x+2 & x \geq 5 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 5$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 2.7.48 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x-5} & x < 5 \\ 3x+2 & x \geq 5 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 5$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 2.7.49 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x^2-4 & x \leq 2 \\ \dfrac{1}{x-2} & x > 2 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 2$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 2.7.50 *Dada la función* $f(x) = \begin{cases} x^2 & x \leq 2 \\ \dfrac{-1}{x-2} & x > 2 \end{cases}$ *Estudia su continuidad para* $x = 2$. *En caso de ser discontinua, clasifica de qué tipo es*

Exercise 2.7.51 *De las funciones dadas estudia su continuidad. Clasifica sus discontinuidades*

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x}{x - 3}$$
$$f(x) = \frac{-x^2 + 5x}{x - 3}$$

Exercise 2.7.52 *De las siguientes funciones*

$f(x) = \dfrac{x^2 - 9}{x^2 - 1}$

$f(x) = \dfrac{2x^2 - 2x + 2}{x^2 - 1}$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 5x + 6}{9 - x^2}$

$f(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 5x + 6}$

Estudia su dominio de definición, el dominio de continuidad, puntos de corte con los ejes de coordenadas y además $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ *y* $\lim_{x\to-\infty} f(x)$. *Intenta dibujar la gráfica con la información obtenida*