Part I

Ficha I de Matrices y determinantes

1 Ejercicios de matrices

1. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$,$B = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ -3 & 0 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$
   Calcula las siguientes combinaciones lineales
   a)$-A + 3B + 2C$
   b)$3A - 2B - C$
   c)$\frac{2}{3}A - \frac{7}{3}B - \frac{4}{3}C$ (Nota: $\frac{2}{3}A - \frac{7}{3}B - \frac{4}{3}C = \frac{1}{3}(2A - 7B - 4C)$)

2. Calcula las matrices X e Y de orden $2x3$ tales que:

$$\begin{cases} 3X - 2Y = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix} \\ -X + 3Y = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & -5 \end{pmatrix} \end{cases}$$

3. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 5 & -1 \end{pmatrix}$
   a) Calcula $A{\cdot}B$
   b) Calcula $B{\cdot}A$
   c) ¿$A{\cdot}B = B{\cdot}A$?

4. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -12 & -6 \\ -27 & -10 \end{pmatrix}$
   a) ¿Se puede escribir C como combinación lineal de A y B?
   b) Si consideramos la matriz $D = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$.¿ Se puede escribir D como combinación lineal de A, B y C?
   c) ¿La matriz $E = \begin{pmatrix} -6 & 6 \\ 9 & 5 \end{pmatrix}$ es combinación lineal de B y C?

5. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$ determina la forma de las matrices B cuadradas de orden 2 que verifican:
   a) $A{\cdot}B = O$ donde O es la matriz nula
   b) $A{\cdot}B = I$ donde I es la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
   c) $A{\cdot}B = H$ donde H es la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

6. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$ determina la forma de las matrices B cuadradas de orden 2 que verifican:
a) $A{\cdot}B = O$ donde O es la matriz nula
b) $A{\cdot}B = I$ donde I es la matriz identidad $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
c) $A{\cdot}B = H$ donde H es la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

7. Dadas las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
a) Calcula $A{\cdot}B$ y $B{\cdot}A$
b) Si $C = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ calcula :

$$a) A\cdot (B - C)$$
$$b) B\cdot (A + C)$$

8. Dada la matriz regular $A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ -3 & 1 & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
a) Determina su matriz inversa A^{-1}, con respecto al producto de matrices, utilizando el método de Gauss-Jordan
b) Calcúlala de otra manera
b) Comprueba que $A{\cdot}A^{-1} = I$ y $A^{-1}{\cdot}A = I$
c) Utilizando la inversa de la matriz A resuelve el sistema

$$\begin{cases} -x + 2y = 3 \\ -3x + 1y - 1z = -1 \\ 3x + 4y + z = 0 \end{cases}$$

9. a) Demuestra que dada la matriz $H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ con $ad - bc \neq 0$, su matriz inversa es:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

b) Resuelve la ecuación matricial $A{\cdot}X{\cdot}B = C$ donde $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$