Part I

Ficha II de matrices y determinantes

1 Ejercicios combinados de matrices y determinantes

Exercise 1 *a) Calcula* A^2-3A-I *si* $I=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ *y* $A=\begin{pmatrix}2&3\\1&1\end{pmatrix}$
b) Calcula, si es posible, la inversa de A

Exercise 2 *a) Demuestra que* $A^2-A-2I=O$ *donde* $A=\begin{pmatrix}0&1&1\\1&0&1\\1&1&0\end{pmatrix}$ I *es la matriz identidad de orden 3 y* O *es la matriz nula de orden tres*
b) Calcula, si existe la inversa de la matriz A

Exercise 3 *Resuleve la ecuación matricial* $\begin{pmatrix}1&-1\\3&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x\\y&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$

Exercise 4 *Determina las matrices cuadradas* A *de orden 2x3 que verifican:*

$$\begin{pmatrix}0&1\\0&2\end{pmatrix}A=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&0&2\end{pmatrix}$$

Exercise 5 *Una matriz cuadrada* M *es ortogonal sy y sólo sí* $M\cdot M^t=I$*. Dada la matriz* $M=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$ *¿*M *es ortogonal?*

Exercise 6 *¿Las matrices* $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&-1\\0&1&0\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}-1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}-1&0\\0&0\\0&-1\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&-1\\0&-1&0\end{pmatrix}$ *son ortogonales?*

Exercise 7 *Dada la matriz* $X=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\0&1&1&1\\0&0&1&1\\0&0&0&1\end{pmatrix}$ *calcula* X^2,X^3,X^4

Exercise 8 *Dadas las matrices* $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\0&0&1\end{pmatrix}$ *calcula* $B^{\,3}$ *y* A^3

Exercise 9 *Calcula los siguientes determinantes*

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 5 & -3 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$c)\begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{vmatrix} \qquad d)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercise 10 *a) Calcula la inversa de la matriz* $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

b) Utilizando el apartado anterior resuelve el sistema:

$$\left\{ \begin{array}{c} x+y=3 \\ y+z=-2 \\ x+z=4 \end{array} \right.$$

Exercise 11 *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ *y* $B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$

a) Calcula ,si se puede, $(A{\cdot}B)^{-1}$

b) Calcula ,si se puede, $(B{\cdot}A)^{-1}$

Exercise 12 *Calcula los siguientes determinantes:*

$$a)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \log 3 & \log 30 & \log 300 \\ (\log 3)^2 & (\log 30)^2 & (\log 300)^2 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} a^2 & a & 1 \\ b^2 & b & 1 \\ c^2 & c & 1 \end{vmatrix}$$

Exercise 13 *Calcula este determinante* $\begin{vmatrix} 1 & b & c+a \\ 1 & a & b+c \\ 1 & c & a+b \end{vmatrix}$ *sin utilizar la regla de Sarrus.*

Exercise 14 *Calcula los siguientes determinantes:*

$$a)\begin{vmatrix} 3 & x & x & x \\ x & 3 & x & x \\ x & x & 3 & x \\ x & x & x & 3 \end{vmatrix} \qquad b)\begin{vmatrix} 1+a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+d \end{vmatrix} \qquad c)\begin{vmatrix} a^2 & ab & ab & b^2 \\ ab & a^2 & b^2 & ab \\ ab & b^2 & a^2 & ab \\ b^2 & ab & ab & a^2 \end{vmatrix}$$

Exercise 15 *Reseuelve la ecuación*

$$\begin{vmatrix} x & -1 & -1 & 0 \\ -x & x & -1 & 1 \\ 1 & -1 & x & 1 \\ 1 & -1 & 0 & x \end{vmatrix} = 0$$

Exercise 16 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \lambda \\ \lambda & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. *a)¿Determinar el valor de* λ *para que* A *admita inversa?*
b) Calcula la inversa de A *en general (cuando exista)*
c) Para $\lambda = 1$ *calcúlala*

Exercise 17 *Sea* $A_x = \begin{pmatrix} x-2 & 0 & 2 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix}$ *a)¿Determinar el valor de* x *para que* A *admita inversa?*
b) Si $x = 3$ *resuelve la ecuación matricial*[1]

$$A_3 Y + B = I \text{ donde } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } I \text{ es la matriz identidad}$$

Exercise 18 *¿Para qué valores de* λ *la matriz* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ \lambda & 1 & 2 \end{pmatrix}$ *tiene inversa?*
b) Calcula la inversa de A *en general (cuando exista)*
c) Para $\lambda = 1$ *y* $\lambda = 3$ *calcúlalas*

Exercise 19 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & m & 3 \\ 4 & 1 & -m \end{pmatrix}$*.¿Para qué valores de* m *la matriz* A *tiene inversa?*
b) Calcula la inversa de A *en general (cuando exista)*
c) Para $m = 2$ *calcúlala.*

Exercise 20 *Sea* $A = \begin{pmatrix} 1 & m & 0 & 0 \\ 0 & 1 & m & m \\ 0 & 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$*.Justifica que la matriz* A *es regular*
b) Calcula su inversa de A *.*

Exercise 21 *Dadas las matrices* $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ *y* $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 2 & 5 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.
resuelve la ecuación matricial:

$$A \cdot X + I = C \text{ donde } I \text{ es la matriz identidad}$$

---

[1] $A_3 = \begin{pmatrix} 3-2 & 0 & 2 \\ 0 & 3-2 & 0 \\ 0 & 0 & 3-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$