Título: Sistemas de ecuaciones lineales

Autor:© Juan José Isach Mayo

Fecha:04 Septiembre del 2007

Contents

Chapter 1

Regla de cramer y Teorema de Rouche -Frobenius

1.1 Interpretación matricial de un sistema de ecuacione lineales

Dado el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array}\right.$

resolverlo es equivalente a obtener la matriz columna $X \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix}$ denominada matriz de las incógnitas tal que se verifica la relación matricial $A \cdot X = B$ donde $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots.. & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots.. & \ldots.. & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots. \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \ldots.. & a_{m,n} \end{pmatrix}$ es la matriz de coeficientes del sistema y $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \ldots.. \\ b_m \end{pmatrix}$ es la matriz columna de los términos independientes

Example 1 *Resolver el sistema* $\left\{\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - y + z = -2 \\ x + 2y = 0 \end{array}\right.$

Resolver el sistema anterior equivale a resolver la siguiente ecuación matricial $A \cdot X = B$

$$\begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resuelve este sistema por Gauss y comprueba que no admite solución. En este caso, no existe ninguna matriz columna X que verifique la ecuación matricial $A \cdot X = B$

1.2 Regla de Cramer

Hipótesis

Dado el sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + a_{n,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{array} \right.$$

tal que $|A| = \begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & ..... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & ...... & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & ...... & a_{3,n} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & ..... & a_{n,n} \end{vmatrix} \neq 0$ (la matriz A admite inversa)

Tesis

El sistema es compatible determinado y además las soluciones vienen dadas por:_

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & ..... & a_{1,n} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} & ...... & a_{2,n} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} & ...... & a_{3,n} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ b_n & a_{n,2} & a_{n,3} & ..... & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|} \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} & ..... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} & ...... & a_{2,n} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} & ...... & a_{3,n} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ a_{n,1} & b_n & a_{n,3} & ..... & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 & ..... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 & ...... & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 & ...... & a_{3,n} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & b_n & ..... & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|} \quad ....$$

$$.................... \quad x_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & ..... & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & ...... & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & ...... & b_3 \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & ..... & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Demostración

Resolver el sistema es equivalente a resolver una ecuación matricial del tipo $A \cdot X = B$ esto es:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & ..... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & ...... & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & ...... & a_{3,n} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & ..... & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ..... \\ b_n \end{pmatrix}$$

Como A es regular por hipótesis; entonces A admite inversa A^{-1}. Si multiplicamos la relación matricial $A \cdot X = B$ por A^{-1} tendremos:

$$A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B$$

Por la propiedad asociativa del producto de matrices

$$\left(A^{-1} \cdot A\right) \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Por ser A^{-1} la matriz inversa sabemos que $A^{-1} \cdot A = I$ donde I es la matriz identidad; por lo que:

$$I \cdot X = A^{-1} \cdot B$$

Como la matriz identidad, I, es el elemento neutro para el producto de matrices; entonces $I \cdot X = X$. Con lo que la solución del sistema es única (al ser A^{-1}única) y se obtiene a partir de :

$$X = A^{-1} \cdot B$$

Con lo que queda demostrado que el sistema es compatible determinado

Obtengamos ahora las soluciones

Como $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|} \cdot \left(Adj(A)\right)^t = \dfrac{1}{|A|} \cdot \begin{pmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & A_{1,3} & ..... & A_{1,n} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & A_{2,3} & ...... & A_{2,n} \\ A_{3,1} & A_{3,2} & A_{3,3} & ...... & A_{3,n} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ A_{n,1} & A_{n,2} & A_{n,3} & ..... & A_{n,n} \end{pmatrix}^t$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{1,1}}{|A|} & \dfrac{A_{2,1}}{|A|} & \dfrac{A_{3,1}}{|A|} & ..... & \dfrac{A_{n,1}}{|A|} \\ \dfrac{A_{1,2}}{|A|} & \dfrac{A_{2,2}}{|A|} & \dfrac{A_{3,2}}{|A|} & ...... & \dfrac{A_{n,2}}{|A|} \\ \dfrac{A_{1,3}}{|A|} & \dfrac{A_{2,3}}{|A|} & \dfrac{A_{3,3}}{|A|} & ...... & \dfrac{A_{n,3}}{|A|} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ \dfrac{A_{1,n}}{|A|} & \dfrac{A_{2,n}}{|A|} & \dfrac{A_{3,n}}{|A|} & ..... & \dfrac{A_{n,n}}{|A|} \end{pmatrix}$ donde $A_{i,j}$ es el adjunto del $a_{i,j}$ de la matriz A

Entonces; por ser $X = A^{-1} \cdot B$, tendremos:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ ...... \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{A_{1,1}}{|A|} & \dfrac{A_{2,1}}{|A|} & \dfrac{A_{3,1}}{|A|} & ..... & \dfrac{A_{n,1}}{|A|} \\ \dfrac{A_{1,2}}{|A|} & \dfrac{A_{2,2}}{|A|} & \dfrac{A_{3,2}}{|A|} & ...... & \dfrac{A_{n,2}}{|A|} \\ \dfrac{A_{1,3}}{|A|} & \dfrac{A_{2,3}}{|A|} & \dfrac{A_{3,3}}{|A|} & ...... & \dfrac{A_{n,3}}{|A|} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ \dfrac{A_{1,n}}{|A|} & \dfrac{A_{2,n}}{|A|} & \dfrac{A_{3,n}}{|A|} & ..... & \dfrac{A_{n,n}}{|A|} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ ...... \\ b_n \end{pmatrix}$$

Operando tendremos

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \ldots\ldots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{A_{1,1}}{|A|} \cdot b_1 + \frac{A_{2,1}}{|A|} \cdot b_2 + \frac{A_{3,1}}{|A|} \cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,1}}{|A|} \cdot b_n \\ \frac{A_{1,2}}{|A|} \cdot b_1 + \frac{A_{2,2}}{|A|} \cdot b_2 + \frac{A_{3,2}}{|A|} \cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,2}}{|A|} \cdot b_n \\ \frac{A_{1,3}}{|A|} \cdot b_1 + \frac{A_{2,3}}{|A|} \cdot b_2 + \frac{A_{3,3}}{|A|} \cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,3}}{|A|} \cdot b_n \\ \ldots\ldots \\ \frac{A_{1,n}}{|A|} \cdot b_1 + \frac{A_{2,n}}{|A|} \cdot b_2 + \frac{A_{3,n}}{|A|} \cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,n}}{|A|} \cdot b_n \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{A_{1,1}}{|A|} \cdot b_1 + \frac{A_{2,1}}{|A|} \cdot b_2 + \frac{A_{3,1}}{|A|} \cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,1}}{|A|} \cdot b_n = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ b_2 & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ b_3 & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ b_n & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_2 = \frac{A_{1,2}}{|A|} \cdot b_1 + \frac{A_{2,2}}{|A|} \cdot b_2 + \frac{A_{3,2}}{|A|} \cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,2}}{|A|} \cdot b_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & b_1 & a_{1,3} & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & b_2 & a_{2,3} & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & b_3 & a_{3,3} & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n,1} & b_n & a_{n,3} & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$$x_3 = \frac{A_{1,3}}{|A|} \cdot b_1 + \frac{A_{2,3}}{|A|} \cdot b_2 + \frac{A_{3,3}}{|A|} \cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,3}}{|A|} \cdot b_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 & \ldots\ldots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 & \ldots\ldots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 & \ldots\ldots & a_{3,n} \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & b_n & \ldots\ldots & a_{n,n} \end{vmatrix}}{|A|}$$

$\ldots\ldots\ldots\ldots$

$$x_n = \frac{A_{1,n}}{|A|} \cdot b_1 + \frac{A_{2,n}}{|A|} \cdot b_2 + \frac{A_{3,n}}{|A|} \cdot b_3 + \ldots + \frac{A_{n,n}}{|A|} \cdot b_n = \frac{\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \ldots\ldots & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \ldots\ldots & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \ldots\ldots & b_3 \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \ldots\ldots & b_n \end{vmatrix}}{|A|}$$

Example 2 *Resolver matricialmente el sistema* $\left\{ \begin{array}{r} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - y - 2z = -2 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{array} \right.$

Resolver el sistema anterior es equivalente a resolver la siguiente ecuación matricial

$$A \cdot X = B \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ es tal que $|A| = 49$; entonces A admite inversa, y en concreto $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix}$

Por el teorema anterior sabemos que $X = A^{-1} \cdot B$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{2}{7} & \frac{1}{7} \\ -\frac{2}{7} & \frac{1}{7} & \frac{1}{7} \\ \frac{1}{7} & -\frac{1}{7} & \frac{1}{7} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{4}{7} \\ -\frac{4}{7} \\ \frac{3}{7} \end{pmatrix}$$

$$\text{Las soluciones son} \rightarrow \begin{cases} x = -\frac{4}{7} \\ y = -\frac{4}{7} \\ z = \frac{3}{7} \end{cases}$$

Definition 3 *Denominaremos Sistema de Cramer a aquél que tenga el mismo número de ecuaciones que incógnitas y cuyo matriz de coeficientes sea regular (determinante no nulo)*

Example 4 *Resolver ahora con la regla de Cramer el sistema anterior* $\begin{cases} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - y - 2z = -2 \\ x + 2y + 4z = 0 \end{cases}$

Como $|A| = 49$ entonces podemos aplicar la regla de Cramer para obtener las soluciones del sistema

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{49} = \frac{-4}{7}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{vmatrix}}{49} = \frac{-4}{7}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}}{49} = \frac{3}{7}$$

Example 5 *Resolver ahora con la regla de Cramer el sistema anterior* $\begin{cases} 2x - 3y + z + t = 1 \\ 3x - y - 2z - 3t = -2 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ 2x + y - 3t = 2 \end{cases}$

Como $|A| = \begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix} = -28$ estamos ante un Sistema de Cramer

Aplicando dicha regla

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-28} = -\frac{43}{7} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 & -3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & -3 \end{vmatrix}}{-28} = -\frac{73}{14}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & -3 \end{vmatrix}}{-28} = \frac{29}{7} \qquad t = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \\ 1 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{-28} = -\frac{13}{2}$$

1.3 Interpretación vectorial de un sistema

Resolver un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$$

Equivale a determinar si el vector columna $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix} \in \Re^m$ es o no combinación lineal de los siguientes n vectores de $\Re^m$ $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ . \\ . \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ . \\ . \\ b_{m,2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ . \\ . \\ a_{m,3} \end{pmatrix}$ .....$\overrightarrow{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ . \\ . \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$

Resumiendo:

Resolver $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{cases}$ es

$$\Updownarrow$$

A determinar si $\exists x_1, x_2, ...x_n \in \Re / \overrightarrow{b} = x_1 \overrightarrow{a}_1 + x_2 \overrightarrow{a}_2 + ... + x_n \overrightarrow{a}_n$

Casos

:$\boxed{\text{El sistema es compatible determinado}}$ $\Longleftrightarrow$ El *vector* $\overrightarrow{b}$ *es C.Lineal única* de $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ...\overrightarrow{a}_n$

$\boxed{\text{El sistema es compatible indeterminado}}$ $\Longleftrightarrow$El *vector* $\overrightarrow{b}$ *es C.Lineal no* *única* de $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ...\overrightarrow{a}_n$

$\boxed{\text{El sistema es incompatible}} \Longleftrightarrow$El *vector* $\overrightarrow{b}$ *no es C.Lineal* de $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ...\overrightarrow{a}_n$

1.3.1 Interpretación vectorial de un sistema de ecs. lineales homogéneo

Dado el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{array} \right.$

Resolverlo equivale a determinar si el vector nulo $\overrightarrow{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ 0 \end{pmatrix}$ *de* $\Re^m$ es o no combinación lineal de los siguientes n vectores de $\Re^m$ $\overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ . \\ . \\ a_{m,1} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ . \\ . \\ b_{m,2} \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{a}_3 = \begin{pmatrix} a_{1,3} \\ a_{2,3} \\ . \\ . \\ a_{m,3} \end{pmatrix}$ $.....\overrightarrow{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ . \\ . \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$

Casos

: $\boxed{\begin{array}{l}\text{El sistema es compatible determinado (tan sólo} \\ \text{admite la solución trivial } x_1 = x_2 = ... = x_n = 0)\end{array}} \Longleftrightarrow$ Los *vectores* $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ...\overrightarrow{a}_n$ son *L.I*

$\boxed{\begin{array}{l}\text{El sistema es compatible indeterminado (admite} \\ \text{soluciones distintas de la solución trivial)}\end{array}} \Longleftrightarrow$Los *vectores* $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ...\overrightarrow{a}_n$ son *L.D*

1.4 Teorema de Rouche-Frobenius

Dado el sistema $\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right.$

Si llamamos $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & ..... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & ...... & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & ...... & a_{3,n} \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & ..... & a_{m,n} \end{pmatrix}$ a la matriz de coeficientes del sistema y $A' = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & ..... & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & ...... & a_{2,n} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & ...... & a_{3,n} & b_3 \\ ..... & ..... & ...... & ...... & .... & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & ..... & a_{m,n} & b_m \end{pmatrix}$ a la matriz ampliada entonces el sistema anterior puede presentar las siguientes situaciones:

- a) Compatible Determinado $\Longleftrightarrow Rango\,(A) = Rango\,(A') = n$ (número de incógnitas)

  b) Compatible Indeterminado $\Longleftrightarrow Rango\,(A) = Rango\,(A') < n$ (número de incógnitas)

  c) Incompatible $\Longleftrightarrow Rango\,(A) \neq Rango\,(A')$

Demostración

Resolver $\left\{ \begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = b_m \end{array} \right.$ *es*

$\Leftrightarrow$Si $\exists x_1, x_2, ...x_n \in \Re / \ \overrightarrow{b} = x_1 \overrightarrow{a}_1 + x_2 \overrightarrow{a}_2 + ... + x_n \overrightarrow{a}_n$

donde $\overrightarrow{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ b_m \end{pmatrix}, \overrightarrow{a}_1 = \begin{pmatrix} a_{1,1} \\ a_{2,1} \\ . \\ . \\ a_{m,1} \end{pmatrix}, \overrightarrow{a}_2 = \begin{pmatrix} a_{1,2} \\ a_{2,2} \\ . \\ . \\ b_{m,2} \end{pmatrix}, ...\overrightarrow{a}_n = \begin{pmatrix} a_{1,n} \\ a_{2,n} \\ . \\ . \\ a_{m,n} \end{pmatrix}$ *son vectores de* $\Re^m$

Posibilidades:

- Si el sistema es C.D$\Longleftrightarrow \overrightarrow{b}$ es combinación lineal única de los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ...\overrightarrow{a}_n \Longleftrightarrow$El sistema de vectores $S = \{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ...\overrightarrow{a}_n\}$ es base de un subespacio vectorial H de $\Re^m \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ...\overrightarrow{a}_n > = < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ...\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{b} > \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ...\overrightarrow{a}_n > = \dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ...\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{b} > = n \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow Rango\,(A) = Rango\,(A') = n$ (número de incógnitas)

- Si el sistema es C.I$\Longleftrightarrow \overrightarrow{b}$ es combinación lineal no única de los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ...\overrightarrow{a}_n \Longleftrightarrow$El sistema de vectores $S = \{\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ...\overrightarrow{a}_n\}$ es ligado y además generador de un subespacio vectorial H de $\Re^m$ cuya $\dim H = r$[1]$< n \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ...\overrightarrow{a}_n > = < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ...\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{b} > = < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ...\overrightarrow{a}_r > \Longleftrightarrow$

$\dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ...\overrightarrow{a}_n > = \dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ...\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{b} > = \dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, ...\overrightarrow{a}_r > = r$

$\Longleftrightarrow Rango\,(A) = Rango\,(A') = r < n$ (número de incógnitas)

[1] De este conjunto de vectores S podemos extraer r vectores linealmente independientes que formarán la base de H . Sin pérdida de generalidad, podemos suponer que son los r primeros

- Si el sistema es Incompatible$\Longleftrightarrow \overrightarrow{b}$ no es combinación lineal de los vectores $\overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ...\overrightarrow{a}_n \Longleftrightarrow < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ...\overrightarrow{a}_n > \subsetneq < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ...\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{b} > \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow \dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ...\overrightarrow{a}_n > \neq \dim < \overrightarrow{a}_1, \overrightarrow{a}_2, \overrightarrow{a}_3, ...\overrightarrow{a}_n, \overrightarrow{b} > \Longleftrightarrow$ $Rango\,(A) < Rango\,(A')$

1.5 Procedimientos para resolver sistemas

1. Estudiaremos si el sistema dado es o no compatible utilizando el Teorema de Rouche-Frobenius

2. En caso de ser compatible $rang(A) = rang(A') = r$, eliminaremos aquellas ecuaciones cuyos ecuaciones no intervengan en el menor principal, de orden r, no nulo encontrado

-
  - Si el sistema fuese compatible determinado entonces ya podríamos aplicar la susodicha regla
  - Si el sistema fuese compatible indeterminado, entonces pasaremos al término independiente aquellas incógnitas cuyos coeficientes no aparezcan en el menor principal no nulo encontrado y procederemos a aplicar la regla de Cramer con respecto a las incógnitas que queden a la izquierda

Example 6 *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{l} 3x - 2y + 3z = 2 \\ x - 3y + 2z = -1 \\ 4x - 5y + 5z = 3 \end{array}\right.$

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 5 \end{pmatrix}$ Matriz ampliada $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

Estudiemos el *rango A*

$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 5 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow Rang(A) < 3$ Las tres columnas son L.Dependientes

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow Rango(A) = 2$ .Las dos primeras columnas son L.Independientes y la 3^a columna es combinación lineal de las otras dos.

Determinemos el $rang(A')$

$rang \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 5 & 3 \end{pmatrix} =^2 rang \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \end{pmatrix} {}^3 = 3$

Al ser $Rang(A) = 2$ y $Rang(A') = 3$ →El sistema es incompatible

Example 7 *Resolver* $\left\{\begin{array}{r} 2x - 3y + z = 1 \\ 3x - y - 2z = -2 \\ x + 2y + 4z = 1 \end{array}\right.$

[2] La 3^acol es C.L. de las dos primeras

[3] $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = -14 \neq 0$

Como $|A| = 49$ entonces $rang(A) = rang(A') = 3 \rightarrow$ el sistema es compatible determinado

Podemos aplicar la regla de Cramer para obtener las soluciones del sistema

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix}}{49} = \frac{-21}{49} = \frac{-3}{7}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 4 \end{vmatrix}}{49} = \frac{-21}{49} = \frac{-3}{7}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & -1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{49} = \frac{28}{49} = \frac{4}{7}$$

Example 8 *Resuelve el sistema* $\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2 \\ x - 3y + 2z = -1 \\ 4x - 5y + 5z = 1 \\ 2x + y + z = 3 \end{cases}$

Matriz de coeficientes $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 5 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ Matriz ampliada $A' = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$

Estudiemos el *rango A*

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow$ las dos primeras columnas son L.Independientes

Para saber si la 3^acol de A es o no C.L de la 1^a y la 2^a tendré que considerar los siguientes menores de orden tres:

$\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 5 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

Como los dos son nulos$\rightarrow$ $Rango(A) = 2$ por ser las dos primeras columnas L.I y la 3^a C.L de las anteriores

Determinemos el $rang(A')$

$$rang \begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & 5 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} =^4 rang \begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & 1 \end{vmatrix} = 0$, y $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 0$

Al ser $Rang(A) = 2$ y $Rang(A') = 2 \rightarrow$El sistema es Compatible indeterminado

La matriz tiene de rango 2; entonces sólo hay dos ecuaciones L.Independientes$\rightarrow$La 1^a y la 2^a

Por lo tanto, podemos eliminar las dos últimas ecuaciones

[4] La 3^acol es C.L. de las dos primeras

Así pues, resolver el sistema inicial equivale a resolver el sistema $\left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y + 3z = 2 \\ x - 3y + 2z = -1 \end{array} \right.$

Pasando al otro lado de las ecuaciones el término en z (observa que sus coeficientes no aparecen en el menor de orden 2 no nulo encontrado); tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas x e y

$$\left\{ \begin{array}{l} 3x - 2y = 2 - 3z \\ x - 3y = -1 - 2z \end{array} \right.$$

Aplicando la regla de Cramer

$$x = \frac{\left| \begin{array}{cc} 2-3z & -2 \\ -1-2z & -3 \end{array} \right|}{-7} = \frac{8-5z}{7}$$
$$y = \frac{\left| \begin{array}{cc} 3 & 2-3z \\ 1 & -1-2z \end{array} \right|}{-7} = \frac{5+3z}{7}$$

Example 9 *Dado el sistema* $\left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 2z = 1 \\ 2x - 3y + 5z = 2 \end{array} \right.$ *resuélvelo*

Como $\left| \begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{array} \right| = 3 \rightarrow RangoA = 2 = RangoA'$ el sistema es compatible indeterminado

Si deseamos resolverlo, aplicando la regla de Cramer; tendremos que pasar al otro lado de las igualdades la incógnita z (sus coeficientes no intervienen en el menor principal no nulo encontrado), para obtener de este modo un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas x e y

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 1 - 2z \\ 2x - 3y = 2 - 5z \end{array} \right.$$

Aplicando Cramer

$$x = \frac{\left| \begin{array}{cc} 1-2z & -3 \\ 2-5z & -3 \end{array} \right|}{3} = \frac{3-9z}{3} = 1 - 3z$$
$$y = \frac{\left| \begin{array}{cc} 1 & 1-2z \\ 2 & 2-5z \end{array} \right|}{3} = \frac{-z}{3}$$

Example 10 *Dado el sistema* $\left\{ \begin{array}{l} x - 3y + 2z - 4t = 1 \\ 2x - 3y + 5z - 2t = 2 \end{array} \right.$ *resuélvelo*

Como $\left| \begin{array}{cc} 1 & -3 \\ 2 & -3 \end{array} \right| = 3 \rightarrow RangoA = 2 = RangoA'$ el sistema es compatible indeterminado

Si deseamos resolverlo, aplicando la regla de Cramer; tendremos que pasar al otro lado de las igualdades las incógnita z y t (sus coeficientes no intervienen en el menor principal no nulo encontrado), para así considerar que tenemos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas x e y

$$\left\{ \begin{array}{l} x - 3y = 1 - 2z + 4t \\ 2x - 3y = 2 - 5z + 2t \end{array} \right.$$

Aplicando Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-2z+4t & -3 \\ 2-5z+2t & -3 \end{vmatrix}}{3} = \frac{3-9z-6t}{3} = 1-3z-2t$$
$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1-2z+4t \\ 2 & 2-5z-2t \end{vmatrix}}{3} = \frac{-z-6t}{3}$$

Example 11 *Resolver el siguiente sistema* $\left\{ \begin{array}{l} x-2y=3 \\ 2x-3y=1 \\ x-3y=8 \end{array} \right.$ *en caso de ser compatible*

Empezaremos estudiando el rango de la matriz ampliada A' por ser cuadrada

Calculamos su determinante $\left|A'\right| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -3 & 8 \end{vmatrix} = -24-18-2+9+32+3 = 0$

Como $\left|A'\right| = 0$ entonces las tres columnas de A' son L. D entre sí$\rightarrow$ $Rango(A') < 3$ y como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3+4 = 1 \rightarrow$ las únicas columnas de A' L.I son la 1^a y la2^a $\rightarrow Rango(A') = 2$

Es evidente que $rango(A) = rango \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = rango \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} = 2$

Por el teorema de Rouche- Frobenius sabemos que el sistema es compatible determinado; ya que $Rango(A) = Rango(A') = 2 = n^o$ de incógnitas

Para resolverlo, eliminamos aquellas ecuaciones cuyos coeficientes no intervienen en el menor principal $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}$ no nulo encontrado.Por lo tanto resolveremos el sistema $\left\{ \begin{array}{l} x-2y=3 \\ 2x-3y=1 \end{array} \right.$

Aplicando la regla de Cramer al sistema $\left\{ \begin{array}{l} x-2y=3 \\ 2x-3y=1 \end{array} \right.$ tendremos

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-7}{1} = -7 \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix}} = \frac{-5}{1} = -5$$

Nota: $\boxed{\text{Intenta resolverlo estudiando primero el } Rango(A) \text{ y después el de } A'}$

Example 12 *Dado el sistema* $\left\{ \begin{array}{l} 3x-2y+z+3t=1 \\ x-3y-2z+2t=2 \\ 4x-5y-z+3t=0 \end{array} \right.$ *resuélvelo*

Estudiemos el rango de $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -3 & -2 & 2 \\ 4 & -5 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow$ la 1^afila y la 2^a son L.I

Orlando el menor anterior con la tercera fila y resto de columnas obtendré todos los menores de orden tres donde aparezcan los coeficientes de las tres filas. Si los dos fuesen nulos el $rangoA$ sería dos ; en caso contrario valdría tres $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -2 \\ 4 & -5 & -1 \end{vmatrix} = 0$ ya que la 3^acol=1^a+2^a; pero como $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & 3 \end{vmatrix} = 14 \rightarrow RangoA = 3 = RangoA'$ el sistema es compatible indeterminado (observa que hay cuatro incógnitas)

Si deseamos resolverlo, aplicando la regla de Cramer; tendremos que pasar al otro lado de las igualdades la incógnita z (sus coeficientes no intervienen en el menor princuipal no nulo encontrado), para obtener de este modo un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas x , y y t

$$\begin{cases} 3x - 2y + 3t = 1 - z \\ x - 3y + 2t = 2 + 2z \\ 4x - 5y + 3t = z \end{cases}$$

Aplicando Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & -2 & 3 \\ 2+2z & -3 & 2 \\ z & -5 & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{-17-14z}{14}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1-z & 3 \\ 1 & 2+2z & 2 \\ 4 & z & 3 \end{vmatrix}}{14} = \frac{-1z-14z}{14}$$

$$t = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 1-z \\ 1 & -3 & 2+2z \\ 4 & -5 & z \end{vmatrix}}{14} = \frac{21}{14} = \frac{3}{2}$$

Example 13 *Discutir según los valores de a y b el sistema* $\begin{cases} 3x - 2y + 3z = 2 \\ x - 3y + 2z = -1 \\ 4x - 5y + az = b \end{cases}$
En los casos en que sea compatible, resuélvelo

$$|A| = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & a \end{vmatrix} = -7a + 35$$

Valores que anulan el determinante de $A \rightarrow -7a + 35 = 0 \rightarrow a = 5$

Posibilidades

I) Si $a = 5$ entonces $|A| = 0 \rightarrow RangoA < 3$ las tres columnas de A son L.D.

Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -7 \rightarrow$ la $1^a col$ y la 2^a son L.I$\rightarrow RangoA = 2$

Pasemos a estudiar el rango de A'

$$Rang\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 & 2 \\ 1 & -3 & 2 & -1 \\ 4 & -5 & a & b \end{pmatrix} =^{5} rang\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & b \end{pmatrix} =^{6} \begin{cases} 2 \text{ si } b=1 \rightarrow Rang(A')=2 \\ 3 \text{ si } b\neq 1 \rightarrow Rango(A')=3 \end{cases}$$

Subcasos

- Ia) Si $a = 5 \wedge b = 1 \rightarrow Rango(A) = Rango(A') = 2$ →El sistema es compatible indeterminado

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema $\begin{cases} 3x-2y+3z=2 \\ x-3y+2z=-1 \end{cases}$

Pasando al otro lado de las ecuaciones el término en z (observa que sus coeficientes no aparecen en el menor de orden 2 no nulo encontrado); tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas x e y

$$\begin{cases} 3x-2y=2-3z \\ x-3y=-1-2z \end{cases}$$

Aplicando la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2-3z & -2 \\ -1-2z & -3 \end{vmatrix}}{-7} = \frac{8-5z}{7}$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2-3z \\ 1 & -1-2z \end{vmatrix}}{-7} = \frac{5+3z}{7}$$

- Ib) Si $a = 5 \wedge b \neq 1 \rightarrow Rango(A) = 2$ y $Rango(A') = 3$ →El sistema es incompatible

II) Si $a \neq 5$entonces $|A| \neq 0 \rightarrow RangoA = 3 = Rang(A')$ las tres ecuaciones son L.I

El sistema es compatible determinado
Aplicando la regla de Cramer tendremos:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -1 & -3 & 2 \\ b & -5 & a \end{vmatrix}}{-7b+35} = \frac{-8a+35+5b}{-7b+35}$$
$$y = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 4 & b & a \end{vmatrix}}{-7b+35} = \frac{-5a-3b+28}{-7b+35}$$
$$t = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & b \end{vmatrix}}{-7b+35} = \frac{-7b+7}{-7b+35}$$

[5] La 3^acol es C.L. de las dos primeras

[6] Como $\begin{vmatrix} 3 & -2 & 2 \\ 1 & -3 & -1 \\ 4 & -5 & b \end{vmatrix} = -7b+7$

1.5.1 Rouche aplicado a los sistemas de ecs. lineales homogéneos

Dado el sistema de ecuaciones lineales homogéneo $\left\{\begin{array}{c} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{1,n}x_n = 0 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{2,n}x_n = 0 \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots.. \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ a_{m,1}x_1 + a_{m,2}x_2 + a_{m,3}x_3 + \cdots\cdots + a_{m,n}x_n = 0 \end{array}\right.$

Por ser homogéneo

$$Ran\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\cdots & a_{3,n} \\ ..... & ..... & ...... & .... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3}... & a_{m,n} \end{pmatrix} = Ran\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3}\cdots & a_{1,n} & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3}\cdots & a_{2,n} & 0 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3}\cdots & a_{3,n} & 0 \\ ..... & ..... & ...... & .... & ... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3}... & a_{m,n} & 0 \end{pmatrix}$$

ya que la última columna de la matriz ampliada es nula. Por lo tanto, en virtud del teorema de Rouche estos sistemas son siempre compatibles

Casos:

I) $rang\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ..... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ...... & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & ...... & a_{3,n} \\ ..... & ..... & ...... & .... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ..... & a_{m,n} \end{pmatrix} = n \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es compatible determinado y tan sólo admite la solución trivial } x_1 = ... = x_n = 0}$

II) $rang\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & ..... & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & ...... & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & ...... & a_{3,n} \\ ..... & ..... & ...... & .... \\ a_{m,1} & a_{m,2} & ..... & a_{m,n} \end{pmatrix} < n \Leftrightarrow$ $\boxed{\text{El sistema es compatible indeterminado y admite soluciones distintas de la solución trivial}}$

Example 14 *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{c} 3x - 2y + 3z = 0 \\ x - 3y + 2z = 0 \\ 4x - 5y + az = 0 \end{array}\right.$ *determina el valor de a para que el sistema admita soluciones distintas de la trivial*

Este sistema al ser homogéneo admitirá soluciones distintas de la trivial($x_1 = x_2 = ... = x_n = 0$) siempre que se verifique:

$$Rang\begin{pmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & a \end{pmatrix} < 3 \Longleftrightarrow \begin{vmatrix} 3 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 \\ 4 & -5 & a \end{vmatrix} = 0 \Longleftrightarrow a = 5$$

1.6 Problemas resueltos de sistemas ecuaciones lineales

Exercise 1.6.1 *Resolver el siguiente sistema* $\left\{\begin{array}{c} x-2y=3 \\ 2x-3y=1 \\ 3x-4y=-1 \end{array}\right.$ *en caso de ser compatible*

Empezaremos estudiando el rango de la matriz ampliada $A^{'}$ por ser cuadrada

Calculamos su determinante $\left|A^{'}\right| = \left|\begin{array}{ccc} 1 & -2 & 3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & -4 & -1 \end{array}\right| = 0$

Como $\left|A^{'}\right| = 0$ entonces las tres columnas de $A^{'}$ son L. D entre sí$\rightarrow$ $Rango(A^{'}) < 3$ y como $\left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{array}\right| = -3+4 = 1 \rightarrow$ las únicas columnas de $A^{'}$ L.I son la 1^a y la2^a $\rightarrow Rango(A^{'}) = 2$

Es evidente que $rango(A) = rango \left(\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -3 \\ 1 & -3 \end{array}\right) = rango \left(\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{array}\right) = 2$

Por el teorema de Rouche- Frobenius sabemos que el sistema es compatible determinado; ya que $Rango(A) = Rango(A^{'}) = 2 = n^o$ de incógnitas

Para resolverlo, eliminamos aquellas ecuaciones cuyos coeficientes no intervienen en el menor principal $\left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{array}\right|$ no nulo encontrado.Por lo tanto resolveremos el sistema $\left\{\begin{array}{c} x-2y=3 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right.$

Aplicando la regla de Cramer al sistema $\left\{\begin{array}{c} x-2y=3 \\ 2x-3y=1 \end{array}\right.$ tendremos

$$x = \frac{\left|\begin{array}{cc} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{array}\right|} = \frac{-7}{1} = -7 \quad y = \frac{\left|\begin{array}{cc} 1 & 3 \\ 2 & 1 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{array}\right|} = \frac{-5}{1} = -5$$

Nota: $\boxed{\text{Intenta resolverlo estudiando primero el } Rango(A) \text{ y después el de } A^{'}}$

Exercise 1.6.2 *Resuelve el sistema* $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=-2 \\ 2x-y+3z=1 \\ x-2y+2z=3 \\ 3x+4z=-1 \end{array}\right.$ *en caso de ser compatible*

Empezaremos estudiando el rango de la matriz $A = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{array}\right)$

Como $\left|\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{array}\right| = -3$ es no nulo$\rightarrow$la 1^a y 2^a columnas de A son L.I$\rightarrow$ $Rango(A) \geq 2$

?'La 3^a columna es C. L de la 1^a y 2^a?

Para determinarlo, consideraremos todos los menores de orden tres que se pueden formar al orlar el menor de orden 2 anterior con la 3^a col. y las filas 3^a y 4^a de $A \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix}$

Si los dos fuesen nulos entonces $Rango(A) = 2$; en caso contrario $Rango(A) = 3$

Calculémoslos pues:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 4 + 3 + 1 - 4 + 6 = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 4 \end{vmatrix} = -4 + 9 + 3 - 8 = 0$$

Al ser los dos nulos; entonces la 3^a columna es C. L de la 1^a y 2^a $\rightarrow$ $Rango(A) = 2$ ya que el número máximo de columnas L.I de A es 2

?'Cuál es el $Rango(A^{'})$?

$Rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & 4 & -1 \end{pmatrix} < 4$ ya que la 3^a columna es C. L de la 1^a y 2^a

Fíjate que el rango de esta matriz como máximo puede ser tres

Para determinar su rango bastará con determinar si la 4^a columna es C. L de la 1^a y 2^a.

Para ello calcularemos los siguientes determinantes: $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix}$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ obtenidos al orlar el menor de orden 2 anterior, no nulo, con la 4^acol y las filas 3^ay 4^a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} = -3 + 8 + 1 - 2 - 6 + 2 = 0$$
$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 1 + 3 - 6 + 2 = 0$$

Como los dos son nulos, entonces la 4^a columna es C. L de la 1^a y 2^a $\rightarrow Rango(A^{'}) = 2$

$Rango(A) = Rango(A^{'}) = 2 < 3$ n de incógnitas$\rightarrow$S.C.I

Para resolverlo, eliminamos aquellas ecuaciones cuyos coeficientes no intervienen en el menor principal $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}$ no nulo encontrado$\rightarrow \left\{ \begin{array}{r} x + y + z = -2 \\ 2x - y + 3z = 1 \end{array} \right.$

Pasamos la incógnita z al término independiente y obtendremos de esta manera un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas x e y

$\left\{ \begin{array}{l} x + y = -2 - z \\ 2x - y = 1 - 3z \end{array} \right.$

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-2-z & 1\\ 1-3z & -1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix}-2-z & 1\\ 1-3z & -1\end{vmatrix}}{-3}=\frac{2+z-1+3z}{-3}=\frac{-1-4z}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}1 & -2-z\\ 2 & 1-3z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2 & -1\end{vmatrix}}==\frac{-5+z}{3}$$

Nota: $\boxed{\text{Intenta resolverlo estudiando primero el } Rango(A^{'}) \text{ y después el de } A}$

<u>*CONSEJOS*</u>

A la hora de discutir un sistema de ecuaciones lineales que contiene parámetros, se pueden resolver sistematicamente siempre que una de las dos matrices A o $A^{'}$sea cuadrada

a) Si $\boxed{A \text{ es cuadrada}}$, empezaremos calculando $|A|$.

- <u>Para aquellos valores que no anulan $|A|$</u> siempre se verificará que $\mathbf{Rango(A)} = \mathbf{Rango(A^{'})} = \mathbf{n}$

El *sistema* será <u>*compatible determinado*</u> y determinaremos sus soluciones aplicando la Regla de Cramer

- <u>Para aquellos valores que anulan $|A|$</u> siempre se verificará que $\mathbf{Rango(A)} < \mathbf{n}$

Sustituiremos dichos valores en el sistema y estudiaremos si los rangos de A y $A^{'}$ son iguales o distintos

b) Si $\boxed{A^{'} \text{ es cuadrada}}$, empezaremos calculando $\left|A^{'}\right|$.

- <u>Para aquellos valores que no anulan $\left|A^{'}\right|$</u> siempre se verificará que $\mathbf{Rango(A)} < \mathbf{Rango(A^{'})}$

El *sistema* será <u>*incompatible*</u>

- <u>Para aquellos valores que anulan $\left|A^{'}\right|$</u> sustituiremos dichos valores en el sistema y estudiaremos si los rangos de A y $A^{'}$ son iguales o distintos

Exercise 1.6.3 *Resolver el sistema* $\left.\begin{array}{l} x+y-z=2\\ ax+y+z=1\\ x-y+3z=-3\\ 4x+2y=a\end{array}\right\}$

<u>Solución</u>

Empezaremos calculando el determinante de la matriz ampliada

$$|A'|=\begin{vmatrix}1 & 1 & -1 & 2\\ a & 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 3 & -3\\ 4 & 2 & 0 & a\end{vmatrix}=-2(a^2-6a+9)=-2(a-3)^2$$

Casos:

I) Si $a\neq 3\to |A'|$ es distinto de cero$\to$ $Rango(A')=4$

Como A es una matriz de orden 4x3, entonces el máximo rango posible de A es 3

Por lo tanto, $Rango(A) \neq Rango(A')$ →El sistema es Incompatible

II) Si $a = 3 \rightarrow |A'| = 0$ →Las cuatro columnas de A' son L. Dependientes

$Rango(A') < 4$

Pasemos pues a estudiar el rango de $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0$ →La 1^a y la 2^a columna de A son L. Independiente $Rango(A) \geq 2$

?' La 3^a columna de A es combinación lineal de la 1^a y la 2^a?

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 0$ y además $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0$

Por lo tanto, 3^a columna de A es combinación lineal de la 1^a y la 2^a

Así pues el $rango(A) = 2$

Determínemos ahora el rango de la matriz ampliada

$$rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -3 \\ 4 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}^{7} = rango \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \\ 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -3 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0$ entonces la 4^a columna de A' es combinación lineal de la 1^a y la 2^a $\rightarrow rango(A') = 2$

Por lo tanto, el sistema es compatible indeterminado

Resolverlo es equivalente a resolver el sistema $\left.\begin{array}{r} x + y - z = 2 \\ 3x + y + z = 1 \end{array}\right\}$

Pasando la incógnita z al otro lado $\left.\begin{array}{r} x + y = 2 + z \\ 3x + y = 1 - z \end{array}\right\}$ tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas x e y

Aplicando, la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2+z & 1 \\ 1-z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{1+2z}{-2}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2+z \\ 3 & 1-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{+5+4z}{+2}$$

Exercise 1.6.4 *Discutir y resolver en los casos en que sea compatible el sistema*

$$\left\{\begin{array}{c} -x + ay + z = 2 \\ 3x - z = 1 \\ 2x + y + 3z = b \end{array}\right.$$

[7] 3^a col $=1^a$col$-2\cdot2^a$ col

$A = \begin{pmatrix} -1 & a & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$;$A' = \begin{pmatrix} -1 & a & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{pmatrix}$

Calculamos el determinante de A; $|A| = \begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 - 2a - 9a - 1 = -11a + 2$

<u>*POSIBILIDADES*</u>

- I) Si $-11a+2 \neq 0 \rightarrow |A| \neq 0$ las tres columnas de A son L.I$\rightarrow$ $Rang(A) = 3 = Rang(A^{'})$

El Sistema será Compatible Determinado

Aplicamos la Regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ b & 1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{-3a-ab+3}{-11a+2},\ y = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & -1 \\ 2 & b & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2b-27}{-11a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} -1 & a & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} -1 & a & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{2a-3ab+7}{-11a+2}$$

- II) Si $-11a + 2 = 0 \rightarrow |A| = 0$ $\rightarrow$las tres columnas de A son L.D$\rightarrow$ $Rang(A) < 3$

$Rang \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{11} & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3$ (no nulo)

Por lo que la matriz A tiene como máximo dos columnas L.I (la 1^a y la 2^a)

Para este valor de $a = \frac{2}{11}$ pasemos a estudiar el rango de $A^{'}$

$Rang \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{11} & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{pmatrix} = Rang \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{11} & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & b \end{pmatrix}$ ya que la 3^a columna L.D con la 1^a y la 2^a

El rango de $A^{'}$ dependerá si es o no nulo el determinante $\begin{vmatrix} -1 & \frac{2}{11} & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & b \end{vmatrix} = \frac{81-6b}{11}$

$$Rang \begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{11} & 1 & 2 \\ 3 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & b \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 & \text{si } b = \frac{27}{2} \quad Rango(A^{'}) = Rango(A) = 2 \rightarrow S.C.I \\ 3 & \text{si } b \text{ no es } \frac{27}{2} \quad Rango(A^{'}) \text{ distinto } Rango(A) \rightarrow S.I \end{cases}$$

En el caso en que el sistema es compatible indeterminado, tenemos que eliminar la primera ecuación, ya que sus coeficientes no aparecen en el menor principal encontrado.

$\left\{\begin{array}{c} 3x-z=1 \\ 2x+y+3z=\frac{27}{2} \end{array}\right.$ $\rightarrow$Pasamos la incógnita z al término independiente en ambas ecuaciones; obteniendo un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas x e y $\rightarrow \left\{\begin{array}{c} 3x=1+z \\ 2x+y=\frac{27}{2}-3z \end{array}\right.$

Aplicando la Regla de Cramer; tendremos:

$$x=\frac{\left|\begin{array}{cc} 1+z & 0 \\ \frac{27}{2}-3z & 1 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{array}\right|}=\frac{1+z}{3} \rightarrow y=\frac{\left|\begin{array}{cc} 3 & 1+z \\ 2 & \frac{27}{2}-3z \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{cc} 3 & 0 \\ 2 & 1 \end{array}\right|}=\frac{77-22z}{6}$$

Exercise 1.6.5 *Discutir y resolver en los casos en que sea compatible el sistema*
$\left\{\begin{array}{c} ax+(a-1)y+z=a+1 \\ (a+2)x+y+z=a+1 \\ (a+1)x+(a+1)z=a+1 \end{array}\right.$

$$A=\left(\begin{array}{ccc} a & a-1 & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{array}\right);A'=\left(\begin{array}{cccc} a & a-1 & 1 & a+1 \\ a+2 & 1 & 1 & a+1 \\ a+1 & 0 & a+1 & a+1 \end{array}\right)$$

Calculamos el determinante de A

$$|A|=\left|\begin{array}{ccc} a & a-1 & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{array}\right|=-a^3+a=-a(a-1)(a+1)$$

Fíjate que los valores de a que anulan el determinante son $0,1,-1$

POSIBILIDADES

I) Si $a(a-1)(a+1)\neq 0 \rightarrow a\neq 0$ y $a\neq 1$ y $a\neq -1 \rightarrow |A|$ es no nulo; las tres columnas de A son L.I.$\rightarrow$ $Rango(A)=3=Rango(A^{'})$ $\rightarrow$El sistema es C.D.

Aplicando la regla de Cramer tendremos:

$$x=\frac{\left|\begin{array}{ccc} a+1 & a-1 & 1 \\ a+1 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc} a & a-1 & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{array}\right|}=\frac{-a^3+a^2+2a}{-a^3+a}=\frac{-a(a-2)(a+1)}{-a(a-1)(a+1)}=\frac{a-2}{a-1},$$

$$y=\frac{\left|\begin{array}{ccc} a & a+1 & 1 \\ a+2 & a+1 & 1 \\ a+1 & a+1 & a+1 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc} a & a-1 & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{array}\right|}=\frac{-2a^2-2a}{-a^3+a}=\frac{2}{a-1}$$

$$z=\frac{\left|\begin{array}{ccc} a & a-1 & a+1 \\ a+2 & 1 & a+1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{array}\right|}{\left|\begin{array}{ccc} a & a-1 & 1 \\ a+2 & 1 & 1 \\ a+1 & 0 & a+1 \end{array}\right|}=\frac{-a^2-a}{-a^3+a}=\frac{1}{a-1}$$

II) Si $a = 0 \rightarrow |A| = 0$; las tres columnas de A son $\dot{\text{L}}$.D.$\rightarrow$ $Rango(A) < 3$

$Rango\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$ (no nulo)

Las columnas 1^a y 2^a son L.I y la 3^a es C.L de ellas

Pasemos pues a estudiar el rango de $A^{'}$

$Rango(A^{'}) = Rango\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = Rango(A) =$ 2

Por lo tanto, el sistema es Compatible.Indeterminado

Además al ser el rango de $A^{'}$ dos; entonces puedo eliminar la 3^a ecuación ya que es C.L de las otras dos (En el menor principal de orden dos no nulo los coeficientes que aparecen son los de las incógnitas x e y de las dos primeras ecuaciones)

$\left\{\begin{array}{c} -y + z = 1 \\ 2x + y + z = 1 \end{array}\right.$ $\rightarrow$Pasando la incógnita z al otro lado$\left\{\begin{array}{c} -y = 1 - z \\ 2x + y = 1 - z \end{array}\right.$

tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas xe y

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1-z & -1 \\ 1-z & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = 1 - z \rightarrow y = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1-z \\ 2 & 1-z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}} = z - 1$$

III) Si $a = 1 \rightarrow |A| = 0$; las tres columnas de A son $\dot{\text{L}}$.D.$\rightarrow$ $Rango(A) < 3$

$Rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$ (no nulo)

Las columnas 1^a y 2^a son L.I y la 3^a es C.L de ellas

Pasemos pues a estudiar el rango de $A^{'}$

$Rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 & 2 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} = 3$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} =$ -2 (no nulo)

Por lo tanto, el sistema es Incompatible

IV) Si $a = -1 \rightarrow |A| = 0$; las tres columnas de A son $\dot{\text{L}}$.D.$\rightarrow$ $Rango(A) < 3$

$Rango\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} =$ 1 (no nulo)

Las filas 1^a y 2^a son L.I y la 3^a es C.L de ellas (por ser nulos sus elementos)

Pasemos pues a estudiar el rango de $A^{'}$

$Rango\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$

Por lo tanto, el sistema es Compatible Indeterminado

Como la tercera ecuación del sistema es nula, tendremos que resolver el siguiente sistema

$$\left\{\begin{array}{c}-x-2y+z=0\\ x+y+z=0\end{array}\right. \rightarrow \text{Pasando la incógnita } z \text{ al otro lado} \left\{\begin{array}{c}-x-2y=-z\\ x+y=-z\end{array}\right.$$

tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas xe y

$$x=\frac{\begin{vmatrix}-z & -2\\ -z & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=-3z\rightarrow y=\frac{\begin{vmatrix}-1 & -z\\ 1 & -z\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}}=2z$$

Exercise 1.6.6 *Resolver el sistema* $\left\{\begin{array}{c}-x-2y+z=2\\ x+3y-2z=1\\ 3x+4y-z=3\\ x-y+3z=3\end{array}\right.$ *en caso de ser compatible*

Como la matriz $A^{'}$ es cuadrada empezaremos calculando $\left|A^{'}\right|$

$$\left|A^{'}\right|=\begin{vmatrix}-1 & -2 & 1 & 2\\ 1 & 3 & -2 & 1\\ 3 & 4 & -1 & 3\\ 1 & -1 & 3 & 3\end{vmatrix}\overset{8}{=}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 4 & -2 & 1\\ 2 & 7 & -1 & 3\\ 4 & 2 & 3 & 3\end{vmatrix}\overset{9}{=}\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 4 & -2 & 5\\ 2 & 7 & -1 & 5\\ 4 & 2 & 3 & -3\end{vmatrix}$$

Calculando este determinante por los adjuntos de la 1^a fila tendremos que

$$\left|A^{'}\right|=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 4 & -2 & 5\\ 2 & 7 & -1 & 5\\ 4 & 2 & 3 & -3\end{vmatrix}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix}-1 & 4 & 5\\ 2 & 7 & 5\\ 4 & 2 & -3\end{vmatrix}=15$$

Por lo tanto $Rango(A^{'})=4\rightarrow A^{'}$ tiene las cuatro columnas L.I.. Es evidente pues; que A tendrá sus tres columnas L.I$\rightarrow$ $Rango(A)=3$

Por lo tanto el sistema es $\underline{Incompatible}$

Exercise 1.6.7 *Enuncia una condición necesaria y suficiente para que el sistema homogéneo*

$$\left\{\begin{array}{c}a_{1,1}x+a_{1,2}y+a_{1,3}z=0\\ a_{2,1}x+a_{2,2}y+a_{2,3}z=0\\ a_{3,1}x+a_{3,2}y+a_{3,3}z=0\end{array}\right. \quad \text{admita soluciones distintas de la trivial}$$

Por ser homogéneo sabemos que siempre es compatible; ya que $Rango(A)=Rango(A^{'})$

Este sistema admitirá la solución trivial , $x=y=z=0$, si y sólo si es C.D, lo cual es equivalente a afirmar que $Rango(A)=Rango(A^{'})=3\Longleftrightarrow|A|$ es no nulo. Por lo tanto, admitirá soluciones distintas de la trivial si y sólo si es compatible indeterminado$\Longleftrightarrow$ $Rango(A)<3$ (n^o *incógnitas*) $\Longleftrightarrow|A|=0$

[8]Modificamos la 1^a*col* sumándole a ésta la 3^a
Modificamos la 2^a*col* sumándole a ésta la 4^a

[9]Modificamos la 4^a*col* restándole a ésta el doble de la 3^a

Exercise 1.6.8 *Dado el siguiente sistema* $\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x + a_{1,2}y + a_{1,3}z = b_1 \\ a_{2,1}x + a_{2,2}y + a_{2,3}z = b_2 \\ a_{3,1}x + a_{3,2}y + a_{3,3}z = b_3 \end{array}\right.$ *tal que* $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$ *es no nulo*

a) Enuncia una condición necesaria y suficiente para que este sistema sea Incompatible

b) Enuncia una condición necesaria y suficiente para que este sistema sea Compatible Determinado

c) Enuncia una condición necesaria y suficiente para que este sistema sea Compatible Indeterminado

Solución

a) El sistema será incompatible $\Longleftrightarrow$ $Rango(A)$ no coincide con el $Rango(A')$

Como por hipótesis $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$ es no nulo; entonces la única posibilidad para que ambos rangos no coinciden es que $Rango(A) = 2$ y $Rango(A^{'}) = 3$ y esta condición se verificará si y sólo si

$\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix}$ es no nulo

b) El sistema será Compatible Determi. $\Longleftrightarrow$ $Rango(A) = Rango(A') = 3$ (n^o *incógnitas*)

Como por hipótesis $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$ es no nulo; entonces la única posibilidad para que ambos rangos coincidan y valgan 3 es que A tenga las tres columnas L.I. Condición que se verificará si y sólo si $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix}$ es no nulo

c) El sistema será Compatible Determi. $\Longleftrightarrow$ $Rango(A) = Rango(A') = 2$ (n^o *incógnitas*)

Como por hipótesis $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix}$ es no nulo; entonces la única posibilidad para que ambos rangos coincidan y valgan 2 es que A y $A^{'}$ tengan como máximo dos columnas L.I (las dos primeras). Condición que se verificará si y sólo si $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & b_2 \\ a_{3,1} & a_{3,2} & b_3 \end{vmatrix} = 0$

Exercise 1.6.9 *Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales homogéneo:*

$$\left\{\begin{array}{c} ax + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \\ x - 2y + (a+1)z = 0 \end{array}\right.$$

Por ser homogéneo siempre es compatible ya que $Rango(A) = Rango(A')$.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & a+1 \end{vmatrix} = -a^2 - a - 4 + 3 + 1 - 2a - 2 + 6a = -a^2 + 3a - 2 = -(a-1)(a-2)$$

POSIBILIDADES

I) Si a es distinta de 1 y distinta de 2 $\rightarrow |A|$ es no nulo$\rightarrow Rango(A) = 3$.Por lo tanto,el sistema será C.Determinado (solución trivial $x = y = z = 0$)

II) Si $a = 1 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow Rango(A) < 3$.El sistema será C.Indeterminado

$Rango.\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$

Resolver el sistema es equivalente a resolver el siguiente:$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$

Pasando la incógnita z al otro lado; tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas x e $y \rightarrow \begin{cases} x + y = -z \\ 2x - y = -3z \end{cases} \rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -3z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} =$ $\frac{-4z}{3}$; $y = \dfrac{\begin{vmatrix} 1 & -z \\ 2 & -3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{z}{3}$

III) Si $a = 2 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow Rango(A) < 3$.El sistema será C.Indeterminado

$Rango.\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & 3 \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$ ya que $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -4$

Resolver el sistema es equivalente a resolver el siguiente:$\begin{cases} 2x + y + z = 0 \\ 2x - y + 3z = 0 \end{cases}$

Pasando la incógnita z al otro lado; tendremos un sistema de Cramer con respecto a las incógnitas x e $y \rightarrow \begin{cases} 2x + y = -z \\ 2x - y = -3z \end{cases} \rightarrow x = \dfrac{\begin{vmatrix} -z & 1 \\ -3z & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} =$ $-z \rightarrow y = \dfrac{\begin{vmatrix} 2 & -z \\ 2 & -3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}} = z$

Exercise 1.6.10 Discute el sistema $\left.\begin{matrix} x - 3y + z = 2 \\ 2x + ay - 3z = 4 \\ 7x + 9y - 8z = b \end{matrix}\right\}$ en función de los parámetros a y b . En los casos en que sea compatible resuélvelo

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & -3 \\ 7 & 9 & -8 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & a & -3 & 4 \\ 7 & 9 & -8 & b \end{pmatrix}$$

Como A es cuadrada empezaremos calculando $|A|$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & -3 \\ 7 & 9 & -8 \end{vmatrix} = -8a + 18 + 63 - 7a - 48 + 27 = -15a + 60$$

Casos:

- I) Si $a \neq 4 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow Rango(A) = 3$ ya que las tres columnas de A $son\ L.I$ (las tres filas de A también)

Al ser A' una matriz de orden 3x4; entonces $Rango(A') = 3 \rightarrow Rango(A) = Rango(A') = 3$

Por el Teorema de Rouche Frobenius el sistema es compatible determinado

Para obtener sus soluciones aplicamos la regla de Cramer

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & a & -3 \\ b & 9 & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & -3 \\ 7 & 9 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{-16a - 6 + 9b - ba}{-15a + 60}$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 7 & b & -8 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & -3 \\ 7 & 9 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{5b - 70}{-15a + 60} = \frac{-b + 14}{3(a - 4)}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & a & 4 \\ 7 & 9 & b \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 2 & a & -3 \\ 7 & 9 & -8 \end{vmatrix}} = \frac{ba + 6b - 84 - 14a}{-15a + 60}$$

- II) Si $a = 4 \rightarrow |A| = 0 \rightarrow Rango(A) < 3$ ya que las tres columnas de A $son\ L.D$ (las tres filas de A también)

Como $\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 10 \rightarrow La1^a$ y la 2^a columnas son $L.I$

El $Rang(A) = 2$ y además sabemos que la 3^acol de A es combinación lineal de las otras dos

¿Cuál es el $Rang(A')$?

$Rang(A')$ coincide con el rango de la matriz obtenida al suprimir la 3^a col

$$\text{Es decir} \rightarrow Rang(A') = Rang \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 7 & 9 & b \end{pmatrix} = \begin{cases} 2 \text{ si} & \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 7 & 9 & b \end{vmatrix} = 0 \rightarrow S.C.I \\ 3 \text{ si} & \begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 7 & 9 & b \end{vmatrix} \neq 0 \rightarrow S.I \end{cases}$$

Como $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 2 \\ 2 & 4 & 4 \\ 7 & 9 & b \end{vmatrix} = 10b - 140$ entonces resumiendo tendremos

- $-$ IIa) Si $a = 4$ y $b = 14$ el sistema es $C.I.$ ya que $Rang(A) = Rang(A') = 2 < 3$ (n^o incógnitas)

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema formado por las dos primeras ecuaciones $\left\{\begin{array}{c} x-3y+z=2 \\ 2x+4y-3z=4 \end{array}\right.$

Pasando la incógnita z al otro lado como parámetro; podemos considerar que el sistema es de Cramer con respecto a x e y

$$\left\{\begin{array}{l} x-3y=2-z \\ 2x+4y=4+3z \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\dfrac{\begin{vmatrix} 2-z & -3 \\ 4+3z & 4 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}=\dfrac{20+5z}{10}=2+\frac{1}{2}z \\ y=\dfrac{\begin{vmatrix} 1 & 2-z \\ 2 & 4+3z \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}}=\dfrac{5z}{10}=\frac{1}{2}z \end{array}\right.$$

En este caso el conjunto solución es $S=\{(2+\alpha,\alpha,2\alpha)\ /\ \alpha\in\Re\}$

- – ∗ Si $a=4$ y $b\neq 14$ el sistema es $Incompatible.$ ya que $Rang(A)=2$ y $Rang(A')=3$

Nota: Otra manera de hacer el problema anterior

- *Discute el sistema* $\left.\begin{array}{c} x-3y+z=2 \\ 2x+ay-3z=4 \\ 7x+9y-8z=b \end{array}\right\}$ *en función de los parámetros a y b . En los casos en que sea compatible resuélvelo*

Dado el sistema $\left.\begin{array}{c} x-3y+z=2 \\ 2x+ay-3z=4 \\ 7x+9y-8z=b \end{array}\right\}$

$$Rang\begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 2 & a & -3 & 4 \\ 7 & 9 & -8 & b \end{pmatrix}=Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 2 & -3 & a & 4 \\ 7 & -8 & 9 & b \end{pmatrix}=Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & a+6 & 0 \\ 0 & 0 & -3a+12 & b-14 \end{pmatrix}$$

Con lo que, resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema $\left.\begin{array}{l} x-3y+z=2 \\ -5z+(a+6)y=0 \\ (-3a+12)y=b-14 \end{array}\right\}$ donde aquí la matriz de coeficientes es $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & a+6 \\ 0 & 0 & -3a+12 \end{pmatrix}$

y la matriz ampliada $A'=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & a+6 & 0 \\ 0 & 0 & -3a+12 & b-14 \end{pmatrix}$

Casos

$$\text{I) Si } a=4 \text{ y} b=14 \rightarrow \left\{\begin{array}{c} RangA=Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2 \\ y \\ RangA'=Rang\begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}=2 \end{array}\right\}$$

Por lo tanto; el sistema es Compatible Indeterminado

Resolverlo sería equivalente a resolver $\left\{\begin{array}{c} x+z-3y=2 \\ -5z+10y=0 \end{array}\right.$,

Si lo resuelves comprobarás que $S=\{(2+y,y,2y)/y\in\Re\}$

II) Si $a = 4$ y b no es 14 $\rightarrow \left\{ \begin{array}{c} RangA = Rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & 10 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2 \\ y \\ RangA' = Rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & b-14 \end{pmatrix} = 3 \end{array} \right\}$

El sistema es Incompatible

III) Si a no es 4; independientemente del valor de b;entonces

$$RangA = Rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 0 & -5 & a+6 \\ 0 & 0 & -3a+12 \end{pmatrix} = 3$$
$$y$$
$$RangA' = Rang \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & -5 & a+6 & 0 \\ 0 & 0 & -3a+12 & b-14 \end{pmatrix} = 3$$

El sistema es Compatible determinado

Si lo resuelves $\left. \begin{array}{c} x+z-3y=2 \\ -5z+(a+6)y=0 \\ (-3a+12)y=b-14 \end{array} \right\}$comprobarás que la solución es $S =$
$\left\{ \left(\dfrac{-9b+6+ba+16a}{15(a-4)}, -\dfrac{b-14}{3(a-4)}, -\dfrac{(a+6)(b-14)}{15(a-4)} \right) \right\}$

Exercise 1.6.11 Resuelve el sistema $\left. \begin{array}{l} x-2y+3z=3 \\ 3x+y-2z=1 \\ 4x+6y-10z=-4 \\ 12x+11y-19z=-4 \end{array} \right\}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -10 \\ 12 & 11 & -19 \end{pmatrix} \qquad A' = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 3 \\ 3 & 1 & -2 & 1 \\ 4 & 6 & -10 & -4 \\ 12 & 11 & -19 & -4 \end{pmatrix}$$

Estudiemos primero el rango de A

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 7 \rightarrow RangoA \geq 2$ ya que las dos primeras columnas de A *son L.I*

¿Es la 3^a col de A combinación lineal de las anteriores?

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 4 & 6 & -10 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & -2 \\ 12 & 11 & -19 \end{vmatrix} = 0$ entonces; podemos afirmar que sí.

Esto es; la 3^a col de A es combinación lineal de las dos primeras$\rightarrow RangoA = 2$

Pasemos ahora a estudiar el rango de A'

$RangA'$ coincide con el rango de la matriz obtenida al suprimir la 3^a col por lo visto anteriormente

$$RangA' = Rang\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -4 \\ 12 & 11 & -4 \end{pmatrix}$$

¿Es la col de términos independientes combinación lineal de la 1^a y 2^a?

Como $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & -4 \end{vmatrix} = 0$ y $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \\ 12 & 11 & -4 \end{vmatrix} = 0$ entonces; podemos afirmar que sí.

Es decir; la col de términos independientes de A' es combinación lineal de las dos primeras→ $RangoA' = 2$

Como $RangoA = RangoA' = 2 < 3(n^o\ incóg)$ por el teorema de Rouche -Frobenius el sistema es compatible indeterminado

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver el sistema formado por las dos primeras ecuaciones (son las únicas L.I)

$\left.\begin{array}{r} x - 2y + 3z = 3 \\ 3x + y - 2z = 1 \end{array}\right\}$ Al resolverlo; obtendremos $S = \left\{ \left(\dfrac{5}{7} + \alpha, -\dfrac{8}{7} + 11\alpha, 7\alpha \right) / \alpha \in \Re \right\}$

Exercise 1.6.12 *Eliminar los parámetros de las siguientes ecuaciones*

$\left\{\begin{array}{c} x = -1 + 2r + s + 3t \\ y = 2 + r - 2s - t \\ z = 1 - r + s \\ u = r + s + 2t \end{array}\right.$ →Escribiendo este sistema en forma vectorial pasando previamente al otro lados los números que no son coeficientes de los párametros tendremos la siguiente igualdad vectorial

$\begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-1 \\ u \end{pmatrix} = r\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ que nos indica que:

$$Rang\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & x+1 \\ 1 & -2 & -1 & y-2 \\ -1 & 1 & 0 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 & u \end{pmatrix} = Rango\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} =^{10} Rango\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \\ -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

Por lo tanto en la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & x+1 \\ 1 & -2 & -1 & y-2 \\ -1 & 1 & 0 & z-1 \\ 1 & 1 & 2 & u \end{pmatrix}$ cuyo rango es dos (ya sabemos que la tercera columna depende de las otras dos) se ha de verificar que la 4^a columna también ha de ser combinación lineal de las dos primeras, lo que se traduce en la siguiente condición:

$$Rango\begin{pmatrix} 2 & 1 & x+1 \\ 1 & -2 & y-2 \\ -1 & 1 & z-1 \\ 1 & 1 & u \end{pmatrix} = 2 \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{c} \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+1 \\ 1 & -2 & y-2 \\ -1 & 1 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \\ y \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 & x+1 \\ 1 & -2 & y-2 \\ 1 & 1 & u \end{vmatrix} = 0 \end{array}\right. \Longleftrightarrow$$

[10] ya que la 3^a columna es la suma de las otras dos

$$\Longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} -x-3y-5z+10=0 \\ 3x-y-5u+5=0 \end{array} \right.$$

1.7 Problemas propuestos

Exercise 1.7.1 *Resolver los siguientes sistemas lineales, utilizando Cramer*

$$\text{a)}\left\{ \begin{array}{l} 3x-y+z=3 \\ 2x+y-z=2 \\ 3x-y+2z=0 \end{array} \right. \quad \text{b)}\left\{ \begin{array}{l} x-2y+z=2 \\ -x+2y-2z=1 \end{array} \right. \quad \text{c)}\left\{ \begin{array}{l} x-2y+3z-t=1 \\ 2x+y-z+t=2 \\ x+3y+4z=5 \end{array} \right.$$

$$\text{d)}\left\{ \begin{array}{l} x+y+z-t=2 \\ 2x+2y-2z+5t=1 \end{array} \right.$$

Soluciones

a)S.C.D $H=\{(1,-3,-3)\}$ b)S.C.I $H=\{(2y+5,y,-3)\ /\ y\in\Re\}$

c)S.C.I $H=\left\{\left(\frac{-5t+18}{20},\frac{-5t+14}{20},\frac{t+2}{4},t\right)\ /\ t\in\Re\right\}$

d)S.C. doblemente Indeter. $H=\left\{\left(x,y,\frac{11-7x-7y}{3},\frac{5-4x-4y}{3}\right)\ /\ x,y\in\Re\right\}$

Exercise 1.7.2 *Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones lineales aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius. En los casos en que sean compatibles, obtener sus soluciones aplicando la Regla de Cramer*

$$\text{a)}\left\{ \begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-3y-2z=1 \\ 3x+y+5z=3 \end{array} \right. \quad \text{b)}\left\{ \begin{array}{c} x+3y-z=1 \\ 2x+2y+z=3 \\ 3x+5y=4 \end{array} \right. \quad \text{c)}\left\{ \begin{array}{l} x+2y+3z=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-3y-2z=1 \\ 3x+y+4z=3 \end{array} \right.$$

$$\text{d)}\left\{ \begin{array}{l} x+y+z=1 \\ 2x-y+3z=2 \\ 3x+4z=8 \end{array} \right.$$

a)S.C.D $H=\{(1,0,0)\}$ b)S.C.I $H=\left\{\left(\frac{7-5z}{4},\frac{3z-1}{4},z\right)\ /\ z\in\Re\right\}$

c)S.C.I $H=\{(1-z,-z,z)\ /\ z\in\Re\}$ d)S.I

Exercise 1.7.3 *Discutir los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, según los valores de a, aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius. En los casos en que sean compatibles, obtener sus soluciones aplicando la Regla de Cramer*

$$\text{a)}\left\{ \begin{array}{l} ax+y+z=1 \\ x+ay+z=a \\ x+y+az=a^2 \end{array} \right. \quad \text{b)}\left\{ \begin{array}{c} x+ay-z=-2 \\ (a+1)x+y+z=a+2 \\ 5x-y-z=-2 \end{array} \right. \quad \text{c)}\left\{ \begin{array}{c} 3x+y+2z=1-a \\ (1+a)x+2y+z=a \\ ax-y+z=1-a \end{array} \right.$$

$$\text{d)}\left\{ \begin{array}{c} 5x-11y+9z=a \\ x-3y+5z=2 \\ 2x-4y+2z=1 \end{array} \right., \quad \text{e)}\left\{ \begin{array}{l} x+y+az=1 \\ x+ay+z=1 \\ ax+y+z=1 \end{array} \right. \quad \text{f)},\left\{ \begin{array}{c} 3x+y+2z=3 \\ 2x+2y+z=1 \\ ax+3y+3z=a-1 \end{array} \right.$$

Soluciones

a) Si $a = 1$ S.C.I $H = \{(1-y-z, y, z) \ / \ y, z \in \Re\}$

Si $a = -2$ S. Incompatible

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ S.C.D $H = \left\{ \left(\dfrac{-a-1}{a+2}, \dfrac{1}{a+2}, \dfrac{(a+1)^2}{a+2} \right) \right\}$

b) Si $a = -1$ S. Incompatible

Si $a = -6$ S. Incompatible

Si $a \neq -1$ y $a \neq -6$ S.C.D $H = \left\{ \left(\dfrac{a}{a+6}, \dfrac{4a}{(a+6)(a+1)}, \dfrac{7a^2+15a+12}{(a+6)(a+1)} \right) \right\}$

c) Si $a = 1$ S. Incompatible

Si $a \neq 1$ S.C.D $H = \left\{ \left(\dfrac{3a}{6a-6}, \dfrac{4a^2-7a+2}{6a-6}, \dfrac{-5a^2+5a-4}{6a-6} \right) \right\}$

d) Si $a = 4$ S.C.I $H = \left\{ \left(\dfrac{-5+14z}{2}, \dfrac{-3+8z}{2}, z \right) /z \in \Re \right\}$

Si $a \neq 4$ S.Incompatible

e) Si $a = 1$ S.C.I $H = \{(1-y-z, y, z) \ / \ y, z \in \Re\}$

Si $a = -2$ S. Incompatible

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ S.C.D $H = \left\{ \left(\frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2}, \frac{1}{a+2} \right) \right\}$

f)Si $a \neq 5$ S.C.D $H = \left\{ \left(1, -\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \right\}$

Si $a = 5$ S.C.I $H = \{(-3y-1, y, 4y+3)\}$

Exercise 1.7.4 *¿Para qué valores de* m *el sistema* $\begin{cases} mx - y + z = 2x \\ x + 2my - mz = y \\ x + my - z = 0 \end{cases}$ *tiene solución no nula?*

Exercise 1.7.5 *Hallar para qué valores de* m *el sistema* $\begin{cases} x + y + (m-2)z = 1 \\ mx + 3y + mz = 2 \end{cases}$ *es compatible*

Exercise 1.7.6 *Demostrar que el sistema* $\begin{cases} x - y + 2z = 2 \\ 2x + y + 3z = 2 \\ 5x + y + az = 6 \end{cases}$ *, tiene solución única si* $a \neq 8$ *. Hallar todas las soluciones cuando a)* $a = 6$, *b)* $a = 7$

Exercise 1.7.7 *Dado el sistema* $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 + a_{1,4}x_4 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 + a_{2,4}x_4 = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 + a_{3,4}x_4 = b_3 \end{cases}$ *tal que* $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \neq 0$ *¿Cuál es la condición necesaria y suficiente para que sea incompatible este sistema?*

Exercise 1.7.8 *Dado el sistema* $\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + a_{1,3}x_3 = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + a_{2,3}x_3 = b_2 \\ a_{3,1}x_1 + a_{3,2}x_2 + a_{3,3}x_3 = b_3 \\ a_{4,1}x_1 + a_{4,2}x_2 + a_{4,3}x_3 = b_4 \end{cases}$ *donde* $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \neq 0$ *¿Cuándo el sistema anterior puede ser incompatible?*

Exercise 1.7.9 *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3=0 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+a_{2,3}x_3=0 \\ a_{3,1}x_1+a_{3,2}x_2+a_{3,3}x_3=0 \\ a_{4,1}x_1+a_{4,2}x_2+a_{4,3}x_3=0 \end{array}\right.$ *del cual sabemos que* $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{vmatrix} \neq 0$ *¿Cuándo el sistema anterior admitirá soluciones distintas de la trivial?*

Exercise 1.7.10 *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2+a_{1,3}x_3+a_{1,4}x_4=0 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2+a_{2,3}x_3+a_{2,4}x_4=0 \\ a_{3,1}x_1+a_{3,2}x_2+a_{3,3}x_3+a_{3,4}x_4=0 \end{array}\right.$ *tal que* $\begin{vmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{vmatrix} \neq 0$ *¿Este sistema admite sólo la solución trivial?. Razona tu respuesta aplicando el teorema de Rouche-Frobenius*

Exercise 1.7.11 *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2=b_1 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2=b_2 \end{array}\right.$ *Aplicando el Teorema de Rouche-Frobenius explica todas las posibilidades que se pueden presentar (utiliza para ello determinantes)*

Exercise 1.7.12 *Dado el sistema* $\left\{\begin{array}{l} a_{1,1}x_1+a_{1,2}x_2=0 \\ a_{2,1}x_1+a_{2,2}x_2=0 \end{array}\right.$ *Enuncia una condición necesaria y suficiente para que el sistema admita soluciones distintas de la trivial (utiliza determinantes)*

Exercise 1.7.13 *¿Para qué valores de k el sistema* $\left\{\begin{array}{c} (k+3)x+y+2z=k \\ kx+(k-1)y+z=2k \\ 3(k+1)x+ky+(k+3)z=5 \end{array}\right.$, *tiene solución ?. En los casos en que sea compatible, determina sus soluciones*

Solución del ejercicio 4.13

Como la matriz A es cuadrada empezaremos calculando su determinante

$$|A| = \begin{vmatrix} k+3 & 1 & 2 \\ k & k-1 & 1 \\ 3k+3 & k & k+3 \end{vmatrix}, =: k^3-k^2 =: k^2(k-1)$$

Los valores que anulan el determinante son 0 y 1

<u>*Posibilidades*</u>

- Si $k \neq 0$ y $k \neq 1 \rightarrow |A| \neq 0 \rightarrow RangoA = 3 = RangoA'$

El sistema es compatible determinado y las soluciones son

$$x = \frac{\begin{vmatrix} k & 1 & 2 \\ 2k & k-1 & 1 \\ 5 & k & k+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k+3 & 1 & 2 \\ k & k-1 & 1 \\ 3k+3 & k & k+3 \end{vmatrix}} = \frac{k^2+4k-15}{k^2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} k+3 & k & 2 \\ k & 2k & 1 \\ 3k+3 & 5 & k+3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k+3 & 1 & 2 \\ k & k-1 & 1 \\ 3k+3 & k & k+3 \end{vmatrix}}=\frac{k^2+k+15}{k^2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} k+3 & 1 & k \\ k & k-1 & 2k \\ 3k+3 & k & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} k+3 & 1 & 2 \\ k & k-1 & 1 \\ 3k+3 & k & k+3 \end{vmatrix}}=-\frac{4k^2-k-15}{k^2}$$

:

- Si $k=0$ $\rightarrow |A|=0 \rightarrow RangoA<3$ las tres columnas son linealmente dependientes

$A=\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ Como $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}$ =: $-3 \rightarrow$ la primera y la segunda columna de A son linealmente independientes y además la tercera es combinación lineal de las dos primeras

Por lo tanto, el $rang(A)=2$

Pasemos a estudiar el rango de la matriz ampliada A'

$Rang\begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}=Rang\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{pmatrix}=3$ ya que $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 5 \end{vmatrix}=$ -15

El sistema es incompatible al ser los rangos distintos

- Si $k=1$ $\rightarrow |A|=0 \rightarrow RangoA<3$ las tres columnas son linealmente dependientes

$A=\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 6 & 1 & 4 \end{pmatrix}$ Como $\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$ =: -1 entonces la primera y la segunda columna de A son linealmente independientes y además la tercera es combinación lineal de las dos primeras

Por lo tanto, el $rang(A)=2$

Pasemos a estudiar el rango de la matriz ampliada A'

$Rang\begin{pmatrix} 4 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 6 & 1 & 4 & 5 \end{pmatrix}=Rang\begin{pmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \end{pmatrix}=2$ ya que $\begin{vmatrix} 4 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 6 & 1 & 5 \end{vmatrix}=0$

(Fijate que $1^a fil+2\cdot 2^a fil=3^a fil$)

Como $RangA=RangA'=2$ el sistema es compatible indeterminado

Las únicas ecuaciones linealmente independientes son la 1^a y la 2^a (la $3^a ec$=$1^a ec$+$2\cdot 2^a ec$)

Así pues; resolver el sistema inicial es equivalente a resolver $\left\{\begin{array}{c} 4x+y+2z=1 \\ x+z=2 \end{array}\right.$,

La solución es el conjunto $H=\{(-z+2,2z-7,z)/\ z\in\Re\}$