

Sistemas ecuacs. exponenciales y logarítmicas

Juan José Isach Mayo

3/11/2009

Sistemas de ecs. exponenciales y logarítmicos

Resuelve los siguientes sistemas:

Ejercicio 1
$$\left. \begin{array}{l} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log x/y = 1 \end{array} \right\}$$

$$\left. \begin{array}{l} \log x + \log y^3 = 5 \\ \log x/y = 1 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{l} \log x + 3 \log y = 5 \\ \log x - \log y = 1 \end{array} \right\}$$

Cambiando de signo la segunda ecuación y sumándole la 1ª:

$$\begin{array}{r} \log x + 3 \log y = 5 \\ -\log x + \log y = -1 \\ \hline 4 \log y = 4 \end{array}$$

de donde

$$\log y = 1$$

sustituyendo este valor en la 1ª ecuación

$$\log x + 3 = 5 \rightarrow \log x = 2$$

Como $\left[\begin{array}{l} \log x = 2 \\ \log y = 1 \end{array} \right]$ aplicando la definición de logaritmo decimal podemos afirmar

$$\left[\begin{array}{l} x = 10^2 = 100 \\ y = 10 \end{array} \right]$$

Ejercicio 2
$$\left. \begin{array}{l} \log x + \log y = 2 \\ x - y = 20 \end{array} \right\}$$

Aislando la incógnita x en la 2ª ecuación $x = 20 + y$ y sustituyendo en la 1ª tendremos:

$$\begin{array}{l} \log(20 + y) + \log y = 2 \\ \log(20y + y^2) = \log 100 \end{array}$$

De donde, obtenemos la ecuación

$$\begin{aligned}20y + y^2 &= 100 \\ y^2 + 20y - 100 &= 0\end{aligned}$$

cuyas soluciones son :

$$y = \frac{-20 \pm \sqrt{800}}{2} = \frac{-20 \pm 20\sqrt{2}}{2} = \begin{cases} -10 + 10\sqrt{2} \\ -10 - 10\sqrt{2} \end{cases}$$

Si $y = -10 + 10\sqrt{2} \rightarrow x = 20 - 10 + 10\sqrt{2} = 10 + 10\sqrt{2}$

La solución $y = -10 - 10\sqrt{2}$ no es válida; ya que $\log(-10 - 10\sqrt{2})$ no es un número real.

Ejercicio 3 $\left. \begin{aligned} 2^x - 4^{2y} &= 0 \\ x - y &= 15 \end{aligned} \right\}$

Como $4^{2y} = (2^2)^{2y} = 2^{4y}$; entonces el sistema queda así:

$$\left. \begin{aligned} 2^x - 2^{4y} &= 0 \\ x - y &= 15 \end{aligned} \right\}$$

Como $2^x - 2^{4y} = 0 \rightarrow 2^x = 2^{4y} \rightarrow x = 4y$

Con lo que resolver el sistema inicial es equivalente a resolver:

$$\left. \begin{aligned} x &= 4y \\ x - y &= 15 \end{aligned} \right\}$$

cuya solución es

$$\begin{bmatrix} x = 20 \\ e \\ y = 5 \end{bmatrix}$$

Ejercicio 4 $\left. \begin{aligned} 2^{2x+5y} &= 2 \\ 2^{-x+y} &= 8 \end{aligned} \right\}$

Escribiendo los términos independientes como potencias de 2 :

$$\left. \begin{aligned} 2^{2x+5y} &= 2^1 \\ 2^{-x+y} &= 2^3 \end{aligned} \right\}$$

Resolver el sistema inicial es equivalente a resolver :

$$\left. \begin{aligned} 2x + 5y &= 1 \\ -x + y &= 3 \end{aligned} \right\}$$

Para ello multiplicamos la 2^a ec. por 2 y le sumamos la primera:

$$\begin{array}{r} 2x + 5y = 1 \\ -2x + 2y = 6 \\ \hline 7y = 7 \end{array}$$

De donde:

$$y = 1$$

Sustituyendo en la 1ª y calculando x , obtendremos

$$x = -2$$

Ejercicio 5 $\left. \begin{array}{l} 2^x + 2^y = 24 \\ 2^x \cdot 2^y = 128 \end{array} \right\}$

Despejando de la 1ª ec 2^x tendremos que:

$$2^x = 24 - 2^y$$

sustituyendo dicha expresión en la segunda, obtenemos la siguiente ecuación:

$$(24 - 2^y) 2^y = 128$$

Multiplicando y transponiendo términos:

$$\begin{aligned} -(2^y)^2 + 24 \cdot 2^y - 128 &= 0 \\ (2^y)^2 - 24 \cdot 2^y + 128 &= 0 \end{aligned}$$

obtenemos una ecuación de segundo grado (la incógnita es 2^y) cuyas soluciones son:

$$2^y = \frac{24 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{24 \pm 8}{2} = \begin{cases} 16 \\ 8 \end{cases}$$

Si $2^y = 16 \rightarrow 2^x = 24 - 16 = 8$

Como $\begin{bmatrix} 2^y = 16 = 2^4 \\ y \\ 2^x = 8 = 2^3 \end{bmatrix} \rightarrow x = 3 \text{ e } y = 4$

Si $2^y = 8 \rightarrow 2^x = 24 - 8 = 16$

Como $\begin{bmatrix} 2^y = 8 = 2^3 \\ y \\ 2^x = 16 = 2^4 \end{bmatrix} \rightarrow x = 4 \text{ e } y = 3$

Nota 1: Si en la 1ª ecuación $2^x + 2^y = 24 \rightarrow 2^y = 24 - 2^x$ aislamos y ; obtenemos la siguiente función logarítmica¹

$$y = \log_2(24 - 2^x)$$

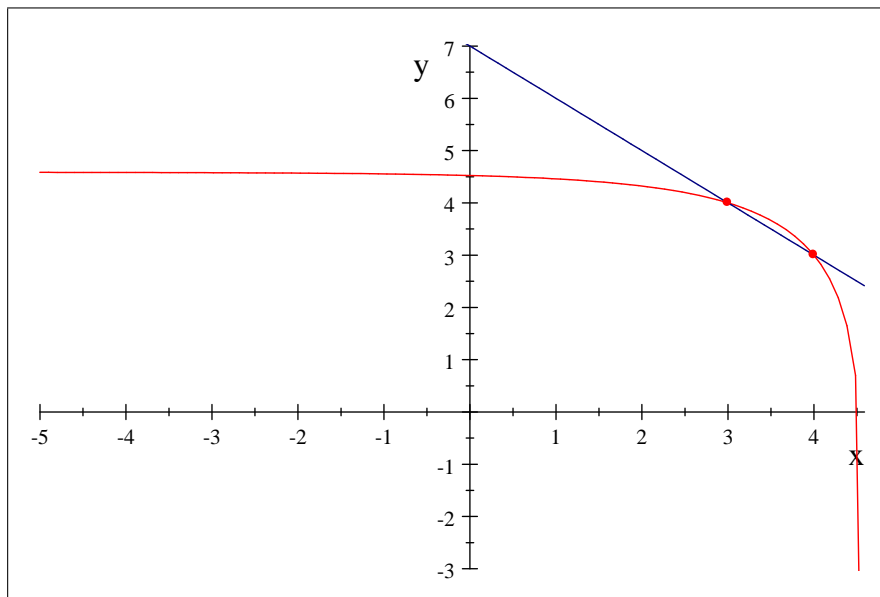
¹Su dominio de definición es :
 $D(f) = \{x \in \mathbb{R} / 24 - 2^x > 0\} = (-\infty, \log_2 24)$

Nota 2: La 2ª ecuación $2^x 2^y = 128 \rightarrow 2^y = \frac{128}{2^x}$ corresponde a la función:

$$y = \log_2 \left(\frac{128}{2^x} \right) = \log_2 2^7 - \log_2 2^x$$
$$y = -x + 7$$

fíjate que es una recta

Nota: Ambas gráficas se cortan en los puntos $P_1(3, 4)$ y $P_2(4, 3)$



$$y = \log_2(24 - 2^x) \text{ e } y = -x + 7$$