Geometría Plana

Juan José Isach Mayo

29 de Septiembre de 2007

Contents

Part I

Geometría plana

1. Geometría afín

Plano afín

LLamaremos plano afín a la terna (R^2, V^2, φ) donde:

R^2 es el planoconsiderado como conjunto de puntos

V^2 el espacio vectorial de los vectores libres de R^2

φ es una aplicación de $R^2 x\ R^2$ en V^2 que a todo par de puntos de R^2 A y B respectivamente le asocia un único vector libre $\varphi((A,B)) = \overrightarrow{AB}$. Esta aplicación verifica las siguientes propiedades

1) Relación de Chasles

$$\varphi((A,B)) + \varphi((B,C)) = \varphi((A,C)) \rightarrow \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{BC}$$

2) Vector libre nulo

$$\varphi((A,A)) = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{0}\ \forall A \in R^2$$

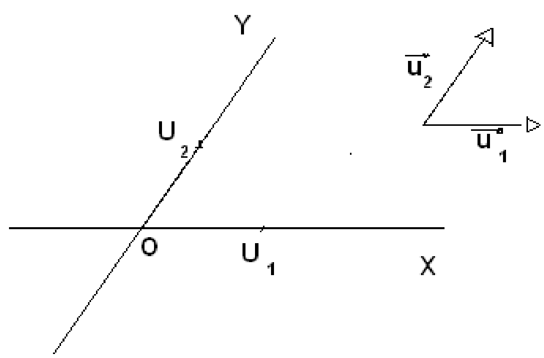
3) Fijado un punto O denominado origen, la aplicación $\varphi_O : R^2 \to V^2$ que a todo punto $A \in R^2$ le asocia su vector de posición $\varphi_O(A) = \overrightarrow{OA}$, con respecto al origen O , es biyectiva

1.1. Sistemas de referencia.

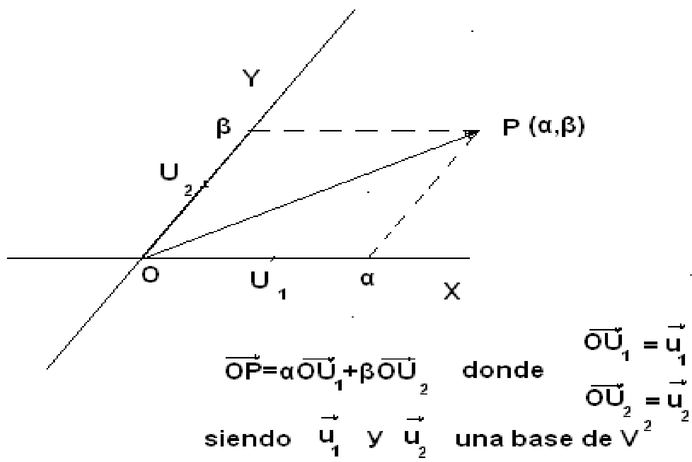
Sistema de referencia afín

Llamaremos sistema de referencia afín del plano afín al siguiente conjunto $S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ donde O es un punto de R^2 y $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ son una base del espacio vectorial V^2; tales que $\overrightarrow{OU_1}, \overrightarrow{OU_2}$, son representantes de estos vectores

Las rectas OX, OY que pasan por O y son paralelas respectivamente a los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ se llaman ejes de coordenadas del sistema de referencia S . El punto O se denomina origen de coordenadas



Comentario Dados el sistema de referencia $S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ y un punto P de R^2; nosotros sabemos que existe un único vector (libre) de posición $\overrightarrow{OP}$ según el sistema de referencia S dado. Por ser los vectores $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ una base de V^2 ,entonces existirán dos únicos reales α y β tales que $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}$ (Recuerda que las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto a la base $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ son (α, β))



Recíprocamente a toda pareja (α,β) corresponde, respecto del sistema de referencia S un único punto P tal que su vector de posición $\overrightarrow{OP}$ tiene de componentes (α,β) con respecto a la base $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ de V^2

Sistema de referencia canónico

Llamaremos sistema de referencia canónico del plano afín al siguiente conjunto $S=\{O,\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}\}$ donde O es un punto de R^2 y $\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}$ son los dos vectores de la base canónica del espacio vectorial V^2

1.2. Coordenadas de un punto.

Definicion 3 *Coordenadas de un punto en un sistema de referencia*

Diremos que las coordenadas de un punto P en el sistema de referencia S son (α,β) y lo representaremos por

$$\boxed{P=(\alpha,\beta)_S \Longleftrightarrow \overrightarrow{OP}=(\alpha,\beta)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} \Longleftrightarrow \overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{u_1}+\beta\overrightarrow{u_2}}$$

Nota : En todo el tema supondremos que estamos trabajando con el sistema de referencia S

Ejemplo Dado el sistema de referencia $S=\{O,\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$; el punto P de coordenadas $(2,3)$ es el extremo de la diagonal OP del paralelogramo de la siguiente figura:

Es evidente; que un mismo punto en distintos sistemas de referencia tendrá distintas componentes

Nota Cuando nos den las coordenadas de un punto y no nos especifiquen en qué sistema vienen expresadas; entenderemos siempre que vienen referidas en el sistema de referencia canónico

1.3. Fórmulas de cambio de sistema de referencia. Dados los siguientes sistemas de referencia $\left.\begin{array}{l} S=\{O,\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\} \\ S'=\{O',\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\} \end{array}\right\}$

donde las componentes de O' en el sistema S son (x_0,y_0) $(OO'=x_0\overrightarrow{u_1}+y_0\overrightarrow{u_2})$ y los vectores $\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}$ tienen de componentes en la base $\beta=\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$ del sistema S

$$\overrightarrow{v_1}=(a_{1,1},a_{2,1})_\beta \Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}=\sum_{k=1}^{2}a_{k,1}\overrightarrow{u_k}$$
$$\overrightarrow{v_2}=(a_{1,2},a_{2,2})_\beta \Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}=\sum_{k=1}^{2}a_{k,1}\overrightarrow{u_k}$$

Si un punto P tiene de coordenadas en el sistema S (a,b) y en el sistema S' son(a',b') entonces las fórmulas de cambio de sistema de referencia vienen dadas por la relación matricial

$$\boxed{\begin{pmatrix} a-x_0 \\ b-y_0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix}} \qquad \text{(Formulas de cambio de sistema)}$$

A la matriz $\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix}$, cuyas columnas son las componentes de los vectores de la base $\beta'=\{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$ de S' con respecto a la base $\beta=\{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$ de S,se le denomina **matriz de cambio de sistema de referencia y la representaremos por A**. Esta matriz A admite inversa ; ya que su determinante es no nulo

Demostración Si conocemos las componentes de un punto ,P, en los dos sistemas de referencia. Esto es:

$$a)\ P(a,b)_S \Leftrightarrow \overrightarrow{OP}=(a,b)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}}=a\overrightarrow{u_1}+b\overrightarrow{u_2}$$
$$a')\ P(a',b')_{S'} \Leftrightarrow \overrightarrow{O'P}=(a',b')_{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}}=a'\overrightarrow{v_1}+b'\overrightarrow{v_2}$$

Por ser $\overrightarrow{O'P}=(a',b')_{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}}=a'\overrightarrow{v_1}+b'\overrightarrow{v_2}$ y como por hípotesis

$$\begin{pmatrix} \overrightarrow{v_1}=(a_{1,1},a_{2,1})_\beta \Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}=\sum_{k=1}^{2}a_{k,1}\overrightarrow{u_k} \\ \overrightarrow{v_2}=(a_{1,2},a_{2,2})_\beta \Leftrightarrow \overrightarrow{v_2}=\sum_{k=1}^{2}a_{k,1}\overrightarrow{u_k} \end{pmatrix} \text{entonces tendremos que}$$

$$\overrightarrow{O'P}=a'\overrightarrow{v_1}+b'\overrightarrow{v_2}=a'\sum_{k=1}^{2}a_{k,1}\overrightarrow{u_k}+b'\sum_{k=1}^{2}a_{k,2}\overrightarrow{u_k}$$

Expresión que después de agrupar nos quedará de la siguiente manera:

$$\overrightarrow{O'P} = (a'a_{1,1} + b'a_{1,2})\,\overrightarrow{u_1} + (a'a_{2,1} + b'a_{2,2})\,\overrightarrow{u_2}$$

Así pues las componentes del vector $\overrightarrow{O'P}$ en la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ de S son

$$\overrightarrow{O'P} = (a'a_{1,1} + b'a_{1,2}, a'a_{2,1} + b'a_{2,2})_\beta \qquad \text{(Relacion a)}$$

Por otra parte, si tenemos presente que $\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$y como además sabemos que $\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{OP} = (a,b)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} \\ \overrightarrow{OO'} = (x_0,y_0)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} \end{array}\right\}$;entonces las componentes del vector $\overrightarrow{O'P}$ en la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ de S son

$$\overrightarrow{O'P} = (a - x_0, b - y_0)_\beta \qquad \text{(Relacion b)}$$

Igualando las relaciones a y b tendremos las siguientes igualdades

$$\begin{array}{l} a - x_0 = a'a_{1,1} + b'a_{1,2} \\ b - y_0 = a'a_{2,1} + b'a_{2,2} \end{array} \qquad \text{(Cambio de sistema)}$$

Expresiones que se reducen a la siguiente igualdad matricial:

$$\begin{pmatrix} a - x_0 \\ b - y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \end{pmatrix} \qquad \text{(c.q.d)}$$

Problemas de cambio de sistema de referencia. 1) Dados los sistemas de referencia $S = \left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ y $S' = \{O, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ tales que $\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_1} = (2,-1)_{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}} \\ \overrightarrow{v_2} = (1,1)_{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}} \end{array}\right.$

a) Si el punto P tiene con respecto a S las siguientes coordenadas $(2,-3)$ determina sus coordenadas en S'

b) Si el punto Q tiene con respecto a $S\ '$ las siguientes coordenadas $(-3,0)$; determina sus coordenadas con respecto a S

Solución

a) Por ser $P(\alpha,\beta)_{S'}$ entonces $\overrightarrow{OP}$ tiene con respecto a la base $\beta' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ del sistema S' las siguientes componentes $\overrightarrow{OP} = (\alpha,\beta)_{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}}$. Es decir $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2}$ teniendo presente ahora las relaciones de cambio entre ambas bases entonces:

$\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2} = \alpha \begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}}$

Operando tendremos:

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2\alpha + \beta & \beta - \alpha \end{pmatrix}_{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}}$$

Como las coordenadas de P en S son $(2,-3) \to \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{i},\overrightarrow{j}}$

Igualando ambas expresiones componente a componente tendremos el siguiente sistema

$$\left.\begin{array}{r} 2\alpha+\beta=2 \\ -\alpha+\beta=-3 \end{array}\right\}$$

Cuyas soluciones son

$$\alpha=\frac{5}{3}; \beta=-\frac{4}{3}$$

Por lo tanto, las coordenadas de P en el sistema de referencia S' son:

$$P\left(\frac{5}{3},-\frac{4}{3}\right)_{S'}$$

Nota: Este ejercicio, también se puede resolver con la siguiente ecuación matricial

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 2 \\ -3 \end{array}\right) \rightarrow A \cdot\left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 2 \\ -3 \end{array}\right)$$ [1]

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}^{-1}\right)^{-1}\left(\begin{array}{c} 2 \\ -3 \end{array}\right):$$

$$\left(\begin{array}{c} \alpha \\ \beta \end{array}\right)=\left(\begin{array}{cc} \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} 2 \\ -3 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} \frac{5}{3} \\ -\frac{4}{3} \end{array}\right)$$

$$:$$

b)Por ser $Q(-3,0)_{S'} \rightarrow \overrightarrow{OQ}=-3\overrightarrow{v_1}=-3(2,-1)_S=(-6,3)_S$
Como $\overrightarrow{OQ}=(-6,3)_S \rightarrow$El punto Q tiene de coordenadas en S $(-6,3,0)$
Nota: Este ejercicio, también se puede resolver con la siguiente ecuación matricial

$$\left(\begin{array}{cc} 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c} -3 \\ 0 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) \text{ donde } \left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right) \text{ coordenadas de } Q \text{ en } S$$

$$\left(\begin{array}{c} -6 \\ 3 \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} x \\ y \end{array}\right)$$

2) Dados los sistemas de referencia $S=\left\{O, \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ y $S^{'}=\left\{O', \overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}\right\}$ tales que $O'=(1,2)_S$

a) Si el punto P tiene con respecto a S las siguientes coordenadas $(2,3)$ determina sus coordenadas en S'

[1] $|A|$ es siempre no nulo $\Longleftrightarrow A$ es regular$\Longleftrightarrow A$ admite inversa
A la matriz A se le denomina matriz de cambio de base

b) Si el punto Q tiene con respecto a $S\ '$ las siguientes coordenadas $(-3,0)$; determina sus coordenadas con respecto a S

Solución

a) Por ser $\left.\begin{array}{l} O' = (1,2)_S \to \overrightarrow{OO'} = (1,2)_{\vec{i},\vec{j}} \\ P = (2,3)_S \to \overrightarrow{OP} = (2,3)_{\vec{i},\vec{j}} \end{array}\right\}$

Sabemos que $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} \to \overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'}$

$$\overrightarrow{O'P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OO'} =^{2} (2,3)_{\vec{i},\vec{j}} - (1,2)_{\vec{i},\vec{j}} = (1,1)_{\vec{i},\vec{j}}$$

Por lo que:

$$\text{las coordenadas de } P \text{ en } S' \text{son } (1,1)$$

Nota: Para resolverlo matricialmente; bastará resolver la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ 3-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

b) Por ser $\left.\begin{array}{l} O' = (1,2)_S \to \overrightarrow{OO'} = (1,2)_{\vec{i},\vec{j}} \\ Q = (-3,0)_{S\ '} \to \overrightarrow{O'Q} = (-3,0)_{\vec{i},\vec{j}} \end{array}\right\}$

Sabemos que $\overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'Q} = \overrightarrow{OQ}$

$$\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{O'Q} = (1,2) + (-3,0) = (-2,2)_{\vec{i},\vec{j}}$$

Por lo que , las coordenadas de Q en S son $(-2,2)$

Nota: Para resolverlo matricialmente; bastará resolver la ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x-1 \\ y-2 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

3) Dados los sistemas de referencia $S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ y $S^{'} = \{O, \overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ tales que $\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{v_1} = 3\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_2} \\ \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_2} \end{array}\right.$ [3]

[2] Las bases de los dos sistemas son la misma; la base canónica

[3] Las componentes de los vectores $\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}$ con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ son $\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}}$; $\overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}}$

a) Si el punto P tiene con respecto a S las siguientes coordenadas $(-2,1)$; determina sus coordenadas con respecto a S'

b) Si el punto Q tiene con respecto a S' las siguientes coordenadas $(-3,2)$; determina sus coordenadas con respecto a S

Solución

a) Por ser $P(\alpha,\beta)_{S'}$ entonces $\overrightarrow{OP}$ tiene con respecto a la base $\beta' = \{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}\}$ del sistema S' las siguientes componentes $\overrightarrow{OP} = (\alpha,\beta)_{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2}}$. Es decir $\overrightarrow{OP} = \alpha\overrightarrow{v_1} + \beta\overrightarrow{v_2}$

Teniendo presente ahora las relaciones de cambio entre ambas bases entonces:

$$\overrightarrow{OP} = \alpha \begin{pmatrix} 3 & 2 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} + \beta \begin{pmatrix} 1 & 2 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}}$$

Calculando tendremos las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$ del sistema S

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 3\alpha+\beta & 2\alpha+2\beta \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} @$$

Como por hipótesis $P(-2,1)_S$ entonces $\overrightarrow{OP}$ tiene con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$ del sistema S las siguientes componentes

$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \end{pmatrix}_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} .@@$$

Igualando ahora las expresiones @ y @@ tendremos el siguiente sistema

$$\left\{ \begin{array}{c} 3\alpha+\beta = -2 \\ 2\alpha+2\beta = 1 \end{array} \right. \quad \text{cuyas soluciones son } \alpha = \tfrac{-5}{4} \ \beta = \tfrac{7}{4}$$

Por lo tanto; las coordenadas de P en el sistema S' son $P\left(\frac{-5}{4},\frac{7}{4}\right)$

Nota 1 Para resolver el problema utilizando matrices , bastará con resolver la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot P' = P$$ [4]

Observa que:

En la primera columna de A te aparecen las componentes de $\overrightarrow{v_1}$ con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$

En la segunda columna de A te aparecen las componentes de $\overrightarrow{v_2}$ con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$

[4] $|A|$ es siempre no nulo $\Longleftrightarrow A$ es regular $\Longleftrightarrow A$ admite inversa
A la matriz A se le denomina matriz de cambio de base

La matriz columna P' son las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto a la base β'

La matriz columna P son las componentes del vector $\overrightarrow{OP}$ con respecto a la base β

Como A es siempre una matriz regular, entonces multiplicando la ecuación matricial por A^{-1}

tendremos que:

$A^{-1} \cdot (A \cdot P') = A^{-1} \cdot P \rightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot P' = A^{-1} \cdot P \rightarrow I \cdot P' = \boxed{P' = A^{-1} \cdot P}$

Asi pues procederemos a calcular:

1^o La inversa de A

2^oCalcularemos $A^{-1} \cdot P$.

3^oDicha matriz columna serán las componentes del punto P con respecto al sistema S'

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Calculando, tendremos:

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\dfrac{5}{4} \\ \dfrac{7}{4} \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = \frac{-5}{4} \ \beta = \frac{7}{4}$$

b) Por ser $Q(-3,2)_{S'}$ entonces $\overrightarrow{OQ}$ tiene con respecto a la base $\beta' = \{\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}\}$ del sistema S' las siguientes componentes $\overrightarrow{OQ} = (-3,2)_{\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3}}$. Es decir $\overrightarrow{OQ} = -3\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2}$ teniendo presente ahora las relaciones de cambio entre ambas bases entonces:

$\overrightarrow{OQ} = -3\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2} = -3\left(3\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_2}\right) + 2\left(\overrightarrow{u_1} + 2\overrightarrow{u_2}\right)$

Reordenando esta última expresión en función de $\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}$ tendremos las componentes del vector $\overrightarrow{OQ}$ con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ del sistema S

$\overrightarrow{OQ} = (-3 \cdot 3 + 2 \cdot 1)\,\overrightarrow{u_1} + (-3 \cdot 2 + 2 \cdot 2)\,\overrightarrow{u_2}$

$\overrightarrow{OQ} = -7\overrightarrow{u_1} - 2\overrightarrow{u_2}$@

Si $Q(\alpha,\beta)_S$ entonces $\overrightarrow{OQ}$ tiene con respecto a la base $\beta = \{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ del sistema S las siguientes componentes $\overrightarrow{OQ} = (\alpha,\beta)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}}$. Es decir $\overrightarrow{OQ} = \alpha\overrightarrow{u_1} + \beta\overrightarrow{u_2}$ @@

Igualando ahora las expresiones @ y @@ tendremos $\alpha = -7$, $\beta = -2$

Nota 2 Para resolver el problema utilizando matrices , bastará con resolver la siguiente ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \rightarrow \alpha = -7 \ , \ \beta = -2$$

1.4. Componentes de un vector.

<u>*Componentes de un vector si conocemos origen y extremo*</u>

Si las coordenadass de dos puntos P y Q son respectivamente $(\alpha,\beta)_S$ y $\left(\alpha',\beta'\right)_S$ entonces las componentes del vector libre $\overrightarrow{PQ}$, con respecto a la base $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$, que los une son:

$$\overrightarrow{PQ}=\left(\alpha'-\alpha,\beta'-\beta\right)_S$$

<u>*Demostración*</u>

Si $\left\{\begin{array}{c} P=(\alpha,\beta)_S \\ Q=\left(\alpha',\beta'\right)_S \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{OP}=(\alpha,\beta)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} \\ \overrightarrow{OQ}=\left(\alpha',\beta'\right)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},} \end{array}\right.$. Por la relación de Chasles, sabemos que $\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}$. Despejando el vector $\overrightarrow{PQ}$ tendremos que $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}$

Por lo tanto, las componentes del vector $\overrightarrow{PQ}$ con respecto a la base $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ son

$$\boxed{\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=\left(\alpha',\beta'\right)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}}-(\alpha,\beta)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}}=\left(\alpha'-\alpha,\beta'-\beta\right)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}}}$$

Ejemplo a) Dado el sistema de referencia $S=\{O,\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$ y dados los puntos P y Q cuyas coordenadas en S son respectivamente $P(-2,-1),Q(4,-3)$. Determina las componentes de los siguientes vectores $\overrightarrow{PQ}$ y $\overrightarrow{QP}$

Solución

$$\left\{\begin{array}{c} P(-2,-1)_S \\ Q(4,-3)_S \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{OP}(-2,-1)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} \\ \overrightarrow{OQ}(4,-3)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} \end{array}\right.$$

Como $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}=(4,-3)-(-2,-1)=(6,-2)$
Como $\overrightarrow{QP}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OQ}=-\left(\overrightarrow{OQ}-\overrightarrow{OP}\right)=-\overrightarrow{PQ}=(-6,2)$

Ejemplo b) Dado el sistema de referencia $S=\{O,\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}\}$ y el vector $\overrightarrow{PQ}$ cuyas componentes en la base $\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}$ son $\overrightarrow{PQ}(4,-3)$. Determina las coordenadas del punto Q si sabemos que las de P son $P(-2,-1)$

Solución

$$\left\{\begin{array}{c} P(-2,-1)_S \\ Q(a,b)_S \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{OP}(-2,-1)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} \\ \overrightarrow{OQ}(a,b)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} \end{array}\right.$$

Como

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (a,b) - (-2,-1) = (a+2, b+1) \\ \overrightarrow{PQ}(4,-3)\end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{c} a+2 = 4 \\ b+1 = -3 \end{array}\right.$$

Entonces:

$$\left.\begin{array}{c} a = 2 \\ b = -4 \end{array}\right\} \rightarrow Q(2,-4)$$

Proposicion 2 *Coordenadas del pto medio de un segmento de extremos P y Q*

Si las coordenadas de dos puntos P y Q son respectivamente $(\alpha, \beta)_S$ y $\left(\alpha', \beta'\right)_S$ entonces las coordenadas del pto medio I del segmento$\overline{PQ}$ son:

$$I = \left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}, \frac{\beta + \beta'}{2}\right)_S$$

<u>*Demostración*</u>

Si $\left\{\begin{array}{c} P = (\alpha, \beta, \gamma)_S \\ Q = \left(\alpha', \beta', \gamma'\right)_S \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{c} \overrightarrow{OP} = (\alpha, \beta)_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}} \\ \overrightarrow{OQ} = \left(\alpha', \beta', \gamma'\right)_{\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}} \end{array}\right.$

Por ser I el pto medio del segmento $\overline{PQ}$ se verifica que $\overrightarrow{IP} + \overrightarrow{IQ} = \overrightarrow{0}$

En virtud de la relación de Chasles $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OI} + \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OI} = \overrightarrow{0}$. Despejando el vector $\overrightarrow{OI}$ tendremos:

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right)$$

Trabajando con componentes

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right) = \frac{1}{2}\left((\alpha, \beta) + (\alpha', \beta')\right) = \left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}, \frac{\beta + \beta'}{2}\right)$$

Por lo que, el punto I tiene de coordenadas en el sistema de referencia S

$$I = \left(\frac{\alpha + \alpha'}{2}, \frac{\beta + \beta'}{2}\right)_S$$

Ejemplo a) Dado el sistema de referencia $S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ y dados los puntos P y Q cuyas coordenadas en S son respectivamente $P(-2,-1), Q(4,-3)$. Determina las coordenadas de su punto medio I

Solución

$$\left\{ \begin{array}{c} P(-2,-1)_S \\ Q(4,-3)_S \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{OP}(-2,-1)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} \\ \overrightarrow{OQ}(4,-3)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} \end{array} \right.$$

Como $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right)$ entonces $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}\left((-2,-1) + (4,-3)\right) = (1,-2)$
Por lo que, el punto I tiene de coordenadas en el sistema de referencia S

$$I = (1,-2)$$

Ejemplo b) Dado el sistema de referencia $S = \{O, \overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}\}$ y dados los puntos P y I cuyas coordenadas en S son respectivamente $P(-2,-1), I(4,-3)$. Determina las coordenadas del punto Q sabiendo que I es el pto medio del segmento $\overline{PQ}$

$$\left\{ \begin{array}{c} P(-2,-1)_S \\ Q(a,b)_S \end{array} \right. \rightarrow \left\{ \begin{array}{c} \overrightarrow{OP}(-2,-1)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} \\ \overrightarrow{OQ}(a,b)_{\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2}} \end{array} \right.$$

Como $\overrightarrow{OI} = \dfrac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OQ}\right)$ entonces

$$\overrightarrow{OI} = \frac{1}{2}\left((-2,-1) + (a,b)\right) = \left(-1 + \frac{1}{2}a, -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b\right)$$

Al ser $I = (4,-3) \rightarrow \overrightarrow{OI} = (4,-3)$ Igualando componente a componente con la expresión anterior tendremos

$$\left. \begin{array}{c} -1 + \frac{1}{2}a = 4 \\ -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}b = -3 \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{c} a = 10 \\ b = -5 \end{array} \right\} \rightarrow Q(10,-5)$$

2. La recta

Una recta, r, en $\Re^2$ queda unívocamente determinado si conocemos un punto P y un vector $\overrightarrow{v}$ (paralelo a r) denominado vector director de la recta

$r = \left\{ X \in \Re^2 \ / \ \overrightarrow{PX} \ // \ \overrightarrow{v} \right\}$

2.1. La recta. Ec. vectorial y ecuaciones parámetricas.

Como $\overrightarrow{PX} // \overrightarrow{v}$ →existirá un único real α / $\overrightarrow{PX} = \alpha \overrightarrow{v}$

En virtud de la relación de Chasles $\overrightarrow{PX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP}$

Por lo tanto

$r = \left\{ X \in \Re^2 \ / \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OP} = \alpha \overrightarrow{v} \right\}$

Despejando el vector $\overrightarrow{OX}$ tendremos

$$\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OP} + \alpha \overrightarrow{v} \qquad \text{(Ecuacion vectorial de la recta)}$$

Si $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} P(a_1, a_2) \\ \overrightarrow{v} = (v_1, v_2) \end{array} \right.$ y el pto genérico X del plano tiene por coordenadas (x, y); entonces sustituyendo en la ecuación vectorial tendremos:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \alpha \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} \qquad \text{(Ecuacion vectorial recta bis)}$$

Operando e igualando componente a componente, tendremos

$$\left. \begin{array}{l} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \end{array} \right\} \qquad \text{(Ecuaciones parametricas)}$$

Nota 1: Conocidas las ecuaciones paramétricas de una recta, si asignamos valores al parámetro obtenemos diferentes puntos de la recta

Nota 2:Una recta también queda univocamente determinada si conocemos dos puntos A y B de ésta. Bastará con considerar como vector director $\overrightarrow{AB}$ o el vector $\overrightarrow{BA}$

2.2. Ecuación continua de la recta.

Sólo existe si v_1, v_2 son no nulos

Despejando α de las ecuaciones paramétricas $\left\{ \begin{array}{l} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \end{array} \right.$ tendremos $\left. \begin{array}{l} \dfrac{x - a_1}{v_1} = \alpha \\ \dfrac{y - a_2}{v_2} = \alpha \end{array} \right\}$ e igualando posteriormente el parámetro α

$$\frac{x - a_1}{v_1} = \frac{y - a_2}{v_2} \qquad \text{(Ecuacion continua de la recta)}$$

Nota A partir de la ecuación continua, también podemos obtener los siguientes tipos de ecuaciones

2.3. Ecuación punto pendiente. Aislando $y - a_2$ de la ecuación continua tendremos:

$$y - a_2 = \frac{v_2}{v_1}(x - a_1)$$

$y - a_2 = m(x - a_1)$ donde la pendiente de la recta es $m = \dfrac{v_2}{v_1}$

2.4. Ecuación explícita. Aislando y de la ecuación anterior

$$y = \frac{v_2 x}{v_1} - \frac{a_1 v_2}{v_1} + a_2$$

Nota 1: *Ec explícita de la recta* $y = mx + b$ *donde* m *es la pendiente y* b *es la ordenada en el origen* (El *punto* $P(0, b)$ *es.de la recta*)

$$Fíjate\ que \begin{bmatrix} m = \dfrac{v_2}{v_1} \\ b = -\dfrac{a_1 v_2}{v_1} + a \end{bmatrix}$$

Nota 2: *Dada la recta de ecuación* $y = mx + b$ *entonces un vector director de ésta puede ser el* $\overrightarrow{v} = (1, m)$ *y un punto el* $P(0, b)$

Nota 3: *La pendiente* m *de una recta coincide con la tangente de su inclinación (ángulo que forma la recta con el sentido positivo del eje de las X)*

$$m = \tan\alpha \text{ siendo } \alpha = ang(r, OX(+))$$

2.5. Ecuación cartesiana , general o implícita. Multiplicando la ecuación punto.-pendiente por v_1 y transponiendo términos:

$$-v_2 x + v_1 y - v_1 a_2 + v_2 a_1 = 0$$

Nota 1: *Dada la ecuación cartesiana* $Ax + By + C = 0$, *observa que un vector director de esta recta puede ser* $\overrightarrow{v} = (B, -A)$ *o* $-\overrightarrow{v} = (-B, A)$

Si necesitaras conocer un punto, bastará con asignar a la incógnita x *un valor y calcular su correspondiente valor de* y

Ejemplo a) Calcular las distintas ecuaciones de la recta que pasa por el punto $A(1, 2)$ y cuyo vector director es $\overrightarrow{v} = (-2, 3)$.Calcula con las ecuaciones paramétricas diferentes puntos de la recta y determina también su inclinación

De la ecuación vectorial $\overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OA} + \alpha\,\overrightarrow{v}$

$$\left.\begin{array}{l} x = 1 - 2\alpha \\ y = 2 + 3\alpha \end{array}\right\} \; Ec.Paramétricas$$

Para obtener tres puntos diferentes de r; basta con asignar a α tres valores diferentes

$$\begin{array}{l} \text{Si } \alpha = 1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 - 2 = -1 \\ y = 2 + 3 = 5 \end{array}\right\} \rightarrow P_1(-1, 5) \\ \text{Si } \alpha = -1 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 + 2 = 3 \\ y = 2 - 3 = -1 \end{array}\right\} \rightarrow P_2(3, -1) \\ \text{Si } \alpha = 2 \rightarrow \left.\begin{array}{l} x = 1 - 4 = -3 \\ y = 2 + 6 = 8 \end{array}\right\} \rightarrow P_3(-3, 8) \end{array}$$

Vamos a obtener la ecuación continua a partir de sus ecuaciones paramétricas. Para ello despejando en éstas α e igualando

$$\frac{x-1}{-2} = \frac{y-2}{3} \; Ec.continua$$

Aislando $y - 2$

$$y - 2 = -\frac{3}{2}(x - 1) \; Ec.\ punto - pendiente$$

Aislando y

$$y = -\frac{3}{2}(x - 1) + 2 \rightarrow y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2} \; Ec.\ explícita$$

Eliminando denominadores y transponiendo términos

$$2y = 7 - 3x \rightarrow 3x + 2y - 7 = 0 \; Ec.cartesiana, general\ o\ implícita$$

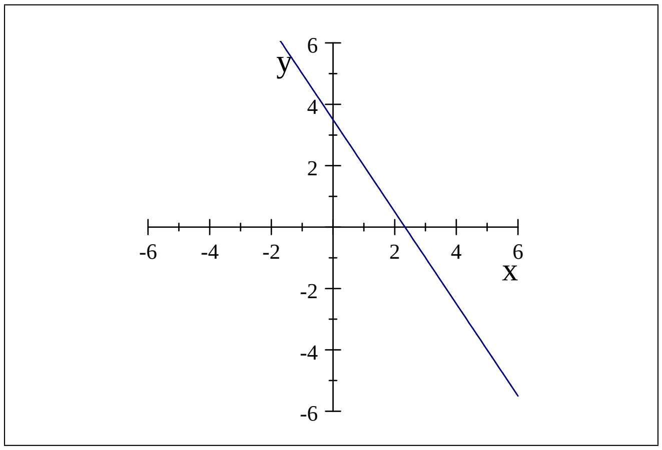
- ¿Cuánto vale su inclinación ?

Como su inclinación α verifica que $\tan\alpha = m$ (pendiente). Entonces:

$$\tan\alpha = -\frac{3}{2}$$

De donde:

$$\alpha \approx 123^o 41' 24.2''$$



Ejemplo b) Calcular las distintas ecuaciones de la recta $r \equiv 2x + y + 3 = 0$. Determina también su inclinación

Para obtener las ecuaciones paramétricas de esta recta , tendremos que determinar un punto y un vector director de ésta.

Si $x = 0 \rightarrow y = -3 \rightarrow$un punto de r es $P(0, -3)$

Un vector director de r puede ser $\overrightarrow{v} = (-1, 2)$

Como $r \equiv \begin{cases} P(0, -3 \\ \overrightarrow{v} = (-1, 2) \end{cases}$ entonces:

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 - 1\alpha \\ y = -3 + 2\alpha \end{array} \right\} Ec.Paramétricas$$

Despejando α, e igualando

$$\frac{x}{-1} = \frac{y+3}{2} Ec.continua$$

Aislando $y + 3$

$$y + 3 = -2x \ Ec. \ punto - pendiente$$

Aislando y

$$y = -2x - 3 \ Ec. \ explícita$$

Observación:

A partir de la general $2x + y + 3 = 0$ *podemos obtener su ecuación explícita:*

$$y = -2x - 3 \ Ec. \ explícita$$

Como la variable y *depende de* x,*asignando a* x *el parámetro* α *obtendremos las ecuaciones paramétricas:*

$$\left. \begin{array}{l} x = 0 - 1\alpha \\ y = -3 + 2\alpha \end{array} \right\} Ec.Paramétricas$$

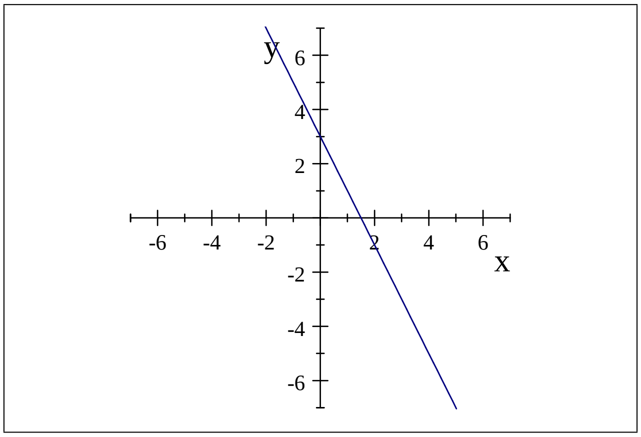
- ¿Cuánto vale su inclinación ?

Como su inclinación α verifica que $\tan\alpha = m$ (pendiente). Entonces:

$$\tan\alpha = -2$$

De donde:

$$\alpha \approx 116^o 33' 54.2''$$



Ejemplo c) Calcular las distintas ecuaciones de la recta que pasa por los puntos $A(-2,3), B(1,-4)$. Determina también su inclinación

Solución

Como una recta ; también queda univocamente determinada si conocemos dos puntos A y B de ésta. Bastará con considerar como vector director $\overrightarrow{AB}$ o el vector $\overrightarrow{BA}$

$r\begin{cases} A(-2,3) \\ B(1,-4) \end{cases} \rightarrow r\begin{cases} A(-2,3) \\ \overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{AB} = (3,-7) \end{cases}$

Las ecuaciones paramétricas de r son:

$$r \equiv \begin{cases} x = -2 + 3\alpha \\ y = 3 - 7\alpha \end{cases}$$

La ecuación continua es:

$$\frac{x+2}{3} = \frac{y-3}{-7} Ec.continua$$

Aislando $y - 3$

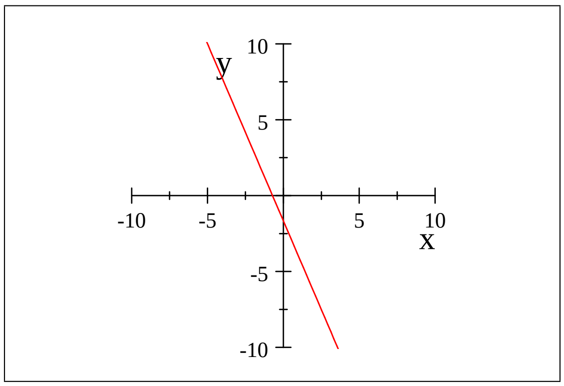
$$y - 3 = -\frac{7}{3}(x+2) \;\; Ec.\ punto - pendiente$$

Aislando y

$$y = -\frac{7}{3}(x+2)+3 \;\rightarrow y = -\frac{7}{3}x - \frac{5}{3} \textit{Ec. explícita}$$

Multiplicando por 3 y transponiendo términos:

$$7x + 3y + 5 = 0$$



- ¿Cuánto vale su inclinación ?

Como su inclinación α verifica que $\tan\alpha = m$ (pendiente). Entonces:

$$\tan\alpha = -\frac{3}{7}$$

De donde:

$$\alpha \approx 156^{o}48'5.1''$$

Ejemplo d) Calcular las distintas ecuaciones de la recta $\dfrac{x-3}{2} = \dfrac{y-4}{1}$. Determina también su inclinación

$$\frac{x-3}{2} = \frac{y-4}{1} \rightarrow \left.\begin{array}{l} \dfrac{x-3}{2} = \alpha \\ \dfrac{y-4}{1} = \alpha \end{array}\right\}$$ Despejando en cada ecuación x, y tendremos las ecuaciones paramétricas

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\alpha \\ y = 4 + \alpha \end{array} \right. \quad \text{Ec paramétricas}$$

De la ecuación continua $\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-4}{1}$ deducimos la ecuación punto pendiente:

$$y-4=\frac{1}{2}(x-3)\ \ \textit{ecuación punto} - \textit{pendiente}$$

Aislando y

$$y=\frac{1}{2}(x-3)+4 \longrightarrow y=\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}\textit{ecuación explícita}$$

Multiplicando por 2 y transponiendo términos:

$$-x+2y-5=0\ \textit{ecuación implícita}$$

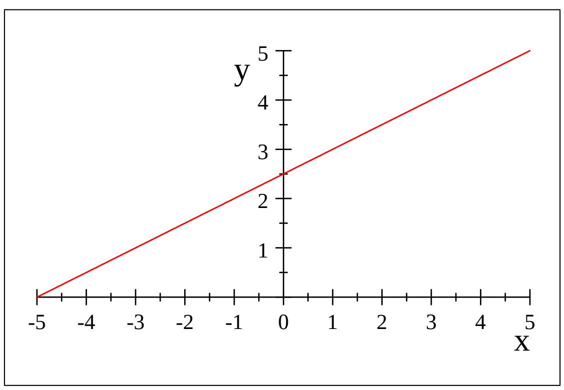
- ¿Cuánto vale su inclinación ?

Como su inclinación α verifica que $\tan\alpha=m$ (pendiente). Entonces:

$$\tan\alpha=\frac{1}{2}$$

De donde:

$$\alpha\approx 26^o 33' 54.2''$$



Ejemplo e) Calcular las distintas ecuaciones de la recta $\dfrac{3x+1}{2}=\dfrac{2y+4}{-3}$ Determina también su inclinación

Esta ecuación no tiene la forma de la ec continua de una recta . Vamos a obtenerla:

$$\frac{3x+1}{2}=\frac{2y+4}{-3}\longrightarrow \left.\begin{array}{l}\dfrac{3x+1}{2}=\alpha\\ \dfrac{2y+4}{-3}=\alpha\end{array}\right\}$$

Despejando en cada ecuación x, y tendremos las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{3} + \frac{2\alpha}{3} \\ y = -2 - \frac{3\alpha}{2} \end{cases}$$

Observa que el vector director de esta recta es $\overrightarrow{v} = (\frac{2}{3}, -\frac{3}{2})$. Como el vector $6\overrightarrow{v} = (4, -9)$ también determina la dirección de la recta, perfectamente puedes considerar como ecuaciones paramétricas de la recta las siguientes:

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{3} + 4\alpha \\ y = -2 - 9\alpha \end{cases}$$

Trabajando a partir de la ecuaciones paramétricas, los cálculos posteriores para obtener las distintas ecuaciones de la recta son más sencillos. Acábalo tú

Nota 1: Fíjate en las transformaciones que realizo en la ecuación dada inicialmente

$$\frac{3x+1}{2} = \frac{2y+4}{-3} \to \frac{\frac{3x+1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{\frac{2y+4}{2}}{\frac{-3}{2}} \to \frac{x+\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{y+2}{\frac{-3}{2}}$$

Multiplico los dos denominadores por 6

$$\frac{x+\frac{1}{3}}{6\cdot\frac{2}{3}} = \frac{y+2}{6\cdot\frac{-3}{2}} \to \frac{x+\frac{1}{3}}{4} = \frac{y+2}{-9}$$

Como esta última si que es la ec. continua; podemos concluir que sus ecs. paramétricas son:

$$\begin{cases} x = \frac{-1}{3} + 4\alpha \\ y = -2 - 9\alpha \end{cases}$$

Nota 2: A partir de $\frac{3x+1}{2} = \frac{2y+4}{-3}$ podemos obtener su ecuación cartesiana

$$-3\,(3x+1) = 2(2y+4) \to -9x - 4y - 11 = 0$$

Si determinamos un punto y su vector director; podemos obtener las ecs. paramétricas

$$r \equiv \begin{cases} \text{Si } y = -2 \to x = \frac{-1}{3} \text{ Luego } P(\frac{-1}{3}, -2) \\ \overrightarrow{v} = (-B, A) = (4, -9) \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} x = \frac{-1}{3} + 4\alpha \\ y = -2 - 9\alpha \end{cases}$$

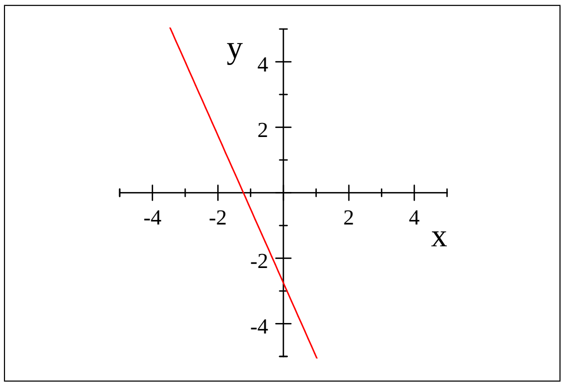
- ¿Cuánto vale su inclinación ?

Como su inclinación α verifica que $\tan\alpha = m$ (pendiente). Entonces:

$$\tan\alpha = -\frac{9}{4}$$

De donde:

$$\alpha \approx 113^o 57' 45''$$



Ejemplo d) Determina las diferentes ecuaciones de una recta cuya inclinación es de 135^o sabiendo que pasa por el punto $P(-3, 2)$

Como $m = \tan 135^o \rightarrow m = -1$
Por lo tanto:

$$y - 2 = -1(x + 3) \text{ Ec. punto-pendiente}$$

Aislando y

$$y = -x - 1 \text{ Ec. Explícita}$$

Transponiendo términos:

$$x + y + 1 = 0 \text{ Ec. General, cartesiana o implícita}$$

Como $m = -1 \rightarrow \overrightarrow{v_r} = (1, -1)$. Por lo que sus ecuaciones paramétricas son:

$$\left\{ \begin{array}{c} x = -3 + \alpha \\ y = 2 - \alpha \end{array} \right.$$

2.6. Ecuación canónica de una recta (ni vertical, ni horizontal). *Toda recta (ni vertical, ni horizontal) que corte a los ejes de coordenadas en los puntos* $P(a, 0)$ *y* $Q(0, b)$ (*ni* a *ni* b *pueden ser nulos*) *tiene por ecuación:*

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

Demostración :

Como de la recta conocemos los puntos $P(a,0)$ y $Q(0,b)$ entonces; podemos considerar como vector director $\overrightarrow{v_r} = \overrightarrow{PQ} = (-a,b)$

Como su pendiente $m_r = -\frac{b}{a}$;entonces:

$$y - b = -\frac{b}{a}(x-0) \text{ Ec punto-pendiente}$$

Multiplicando por a y transponiendo términos de forma adecuada; obtenemos:

$$bx + ay = ab$$

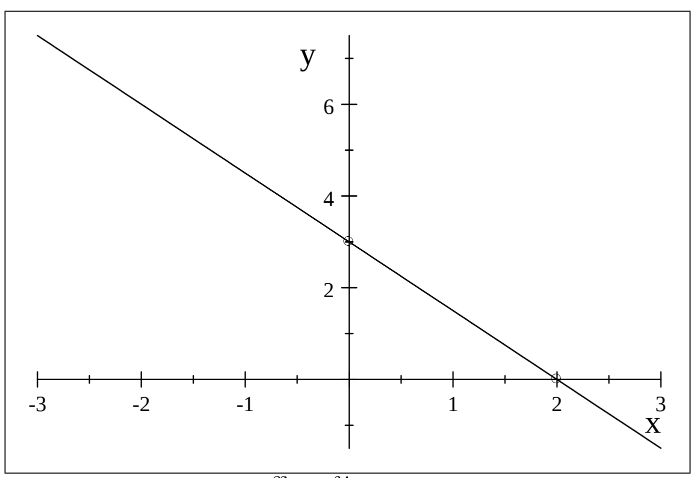
Dividiendo término a término la ecuación por ab ; tendremos:

$$\frac{bx}{ab} + \frac{ay}{ab} = \frac{ab}{ab} \rightarrow \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ Ec. canónica de una recta}$$

Nota: Si nos diesen la ec canónica de una recta r ; por ejemplo:

$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

Ya sabríamos, que ésta corta al eje de las X en el punto $P(2,0)$ y al eje de las Y en el punto $Q(0,3)$. Con estos datos, es muy sencillo dibujarla



$$\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$$

2.7. Rectas muy especiales.

Rectas verticales. Son aquellas cuyo vector director es de la forma $\overrightarrow{v} = (0, v_2)$ con v_2 no nulo

Las rectas verticales se caracterizan así r$\equiv \left\{ \begin{array}{l} P(a_1, a_2) \\ \overrightarrow{v} = (0, v_2) \end{array} \right.$ y sus ecuaciones paramétricas son:

$$\left. \begin{array}{l} x = a_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \end{array} \right\} \text{Ecuaciones paramétricas}$$

Estas rectas no tienen ecuación continua, ni ec punto-pendiente,ni explícita. Sólo tiene ecuación cartesiana, siendo ésta de la forma:

$$x = a_1 \text{ Ecuación cartesiana}$$

Rectas horizontales. Son aquellas cuyo vector director es de la forma $\overrightarrow{v} = (v_1, 0)$ con v_1 no nulo

Las rectas horizontales se caracterizan así

$$\text{r}\equiv \left\{ \begin{array}{l} P(a_1, a_2) \\ \overrightarrow{v} = (v_1, 0) \end{array} \right.$$

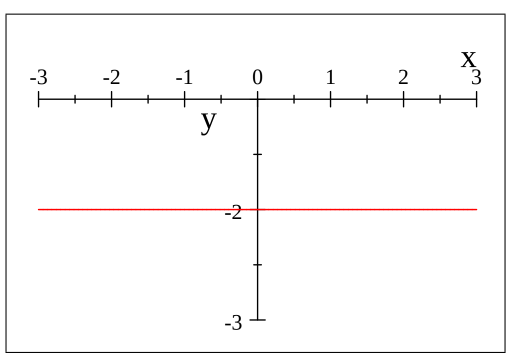
Sus ecuaciones paramétricas son:

$$\left. \begin{array}{l} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 \end{array} \right\} \text{Ecuaciones paramétricas}$$

Su ecuación cartesiana, general o ímplicita es:

$$y = a_2 \text{ Ecuación cartesiana}$$

Ejemplo: Aquí tienes la gráfica de $y = -2$



$y = -2$

Rectas particulares.

Bisectriz del primer y tercer cuadrante. Dicha recta se caracteriza así

$$r \equiv \begin{cases} P(0,0) \\ \overrightarrow{v} = (1,1) \end{cases}$$

Son aquellas cuyo vector director es de la forma $\overrightarrow{v} = (1,1)$ y pasan por el origen de coordenadas

Sus ecuaciones paramétricas son:

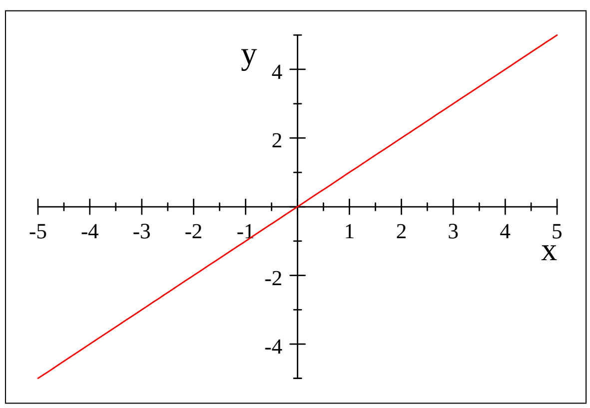
$$\left.\begin{array}{l} x = \alpha \\ y = \alpha \end{array}\right\} \text{Ecuaciones paramétricas}$$

Su ecuación punto pendiente y explícita es

$$y = x$$

Su ec. cartesiana

$$x - y = 0$$



$y = x$

Bisectriz del segundo y cuarto cuadrante. Dicha recta se caracteriza así

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} P(0,0) \\ \overrightarrow{v} = (1,-1) \end{array} \right.$$

Son aquellas cuyo vector director es de la forma $\overrightarrow{v} = (1,-1)$ y pasan por el origen de coordenadas

Sus ecuaciones paramétricas son:

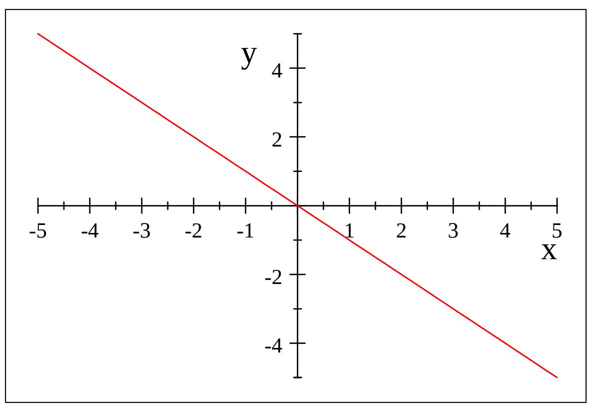
$$\left. \begin{array}{l} x = \alpha \\ y = -\alpha \end{array} \right\} \text{Ecuaciones paramétricas}$$

Su ecuación punto pendiente y explícita es:

$$y = -x$$

Su ecuación cartesiana es:

$$x + y = 0$$



$y = -x$

2.8. Posición relativa de dos rectas. Dadas dos rectas en $\Re^2$ las únicas posibilidades geométricas son las siguientes:

1. r y r' se corten en un punto r $(r \cap r' = P)$

2. r y r' sean paralelas y distintas $(r \cap r' = \emptyset)$

3. r y r'sean paralelas e iguales $(r \cap r' = r)$

Rectas en paramétricas. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = b_1 + \beta w_1 \\ y = b_2 + \beta w_2 \end{cases}$

Para determinar la posición relativa de ambas rectas, bastará con resolver el sistema formado por las ecuaciones de r y s

$r \cap s \equiv \begin{cases} a_1 + \alpha v_1 = b_1 + \beta w_1 \\ a_2 + \alpha v_2 = b_2 + \beta w_2 \end{cases} \rightarrow r \cap s \equiv \begin{cases} \alpha v_1 - \beta w_1 = b_1 - a_1 \\ \alpha v_2 - \beta w_2 = b_2 - a_2 \end{cases}$

Posibilidades:

1) Las componentes de los vectores directores de r y s $(\overrightarrow{v_r} = (v_1, v_2\ )\, y \overrightarrow{v_s} = (w_1, w_2\ ))$ son proporcionales$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son paralelos$\Leftrightarrow$las rectas r y s son paralelas

1 a) Y si además el vector $\overrightarrow{A_rA_s} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ es paralelo a $\overrightarrow{v_r}$; entonces el sistema $r \cap s$ es compatible indeterminado. Es decir ambas rectas tienen infinitos puntos en común. Por lo tanto; además de ser paralelas son la misma recta (coincidentes)$\rightarrow$ $r \cap s = r$

1 b) Y si además el vector $\overrightarrow{A_rA_s} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2)$ no es paralelo a $\overrightarrow{v_r}$ entonces el sistema $r \cap s$ es incompatible; es decir ambas rectas no tienen puntos en común$\rightarrow$ $r \cap s = \emptyset$. Por lo tanto,son paralelas y distintas

2) Las componentes de los vectores directores de r y s $(\overrightarrow{v_r} = (v_1, v_2\ )\, y \overrightarrow{v_s} = (w_1, w_2\ ))$ no son proporcionales (diferente dirección)$\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ no son paralelos$\Leftrightarrow$las rectas r y s son secantes en un punto P

En cuyo caso; el sistema $r \cap s$ es compatible determinado; es decir ambas rectas tienen un único punto P en común (P es la solución del sistema) .

Resumen Dadas dos rectas r y s de las cuales conocemos

$$r \begin{cases} A_r(a_1, a_2) \\ \overrightarrow{v_r} \end{cases} \quad \text{y } s \begin{cases} A_s(b_1, b_2) \\ \overrightarrow{v_s} \end{cases}$$

Las diferentes posiciones relativas de ambas rectas son:

$$\left[\begin{array}{l} r \text{ y } s \text{ son paralelas y distintas} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_r} \; // \; \overrightarrow{v_s} \text{ y } \overrightarrow{A_rA_s} \nparallel \overrightarrow{v_r} \\ r \text{ y } s \text{ son paralelas e iguales} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_r} \; // \; \overrightarrow{v_s} \text{ y } \overrightarrow{A_rA_s} \; // \; \overrightarrow{v_r} \\ r \text{ y } s \text{ son secantes en un punto } P \Leftrightarrow \overrightarrow{v_r} \nparallel \overrightarrow{v_{sr}} \end{array}\right]$$

Ejemplo a) Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \alpha \\ y = 2 - 2\alpha \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\beta \\ y = 4 - 4\beta \end{array} \right.$ determina si tienen algún punto en común

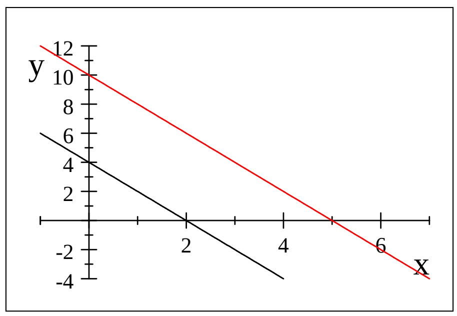
Solución

De ambas rectas conocemos $r \left\{ \begin{array}{l} A_r(1,2) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-2) \end{array} \right.$ y $s \left\{ \begin{array}{l} A_s(3,4) \\ \overrightarrow{v_s} = (2,-4) \end{array} \right.$

$\overrightarrow{v_s} = 2\overrightarrow{v_r} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_r}//\overrightarrow{v_s} \Leftrightarrow r//s$

Calculemos el vector $\overrightarrow{A_rA_s} = (2,2)$

Como $\overrightarrow{A_rA_s} = (2,2)$ ($\overrightarrow{v_r} \nparallel \overrightarrow{A_rA_s}$). Entonces r y s son paralelas y distintas



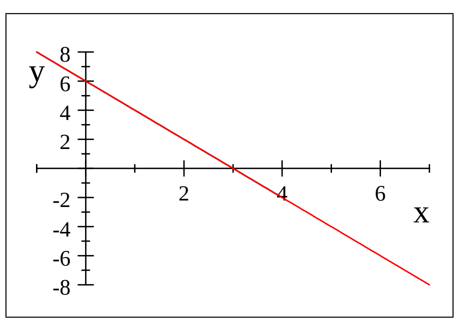
Ejemplo b) Dadas las rectas $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + \alpha \\ y = 4 - 2\alpha \end{array} \right.$ y $s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + 2\beta \\ y = -4\beta \end{array} \right.$ determina si tienen algún punto en común

De ambas rectas conocemos $r \left\{ \begin{array}{l} A_r(1,4) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-2) \end{array} \right.$ y $s \left\{ \begin{array}{l} A_s(3,0) \\ \overrightarrow{v_s} = (2,-4) \end{array} \right.$

$\overrightarrow{v_s} = 2\overrightarrow{v_r} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_r}//\overrightarrow{v_s} \Leftrightarrow r//s$

Calculemos el vector $\overrightarrow{A_rA_s} = (2,-4)$

Como $\overrightarrow{A_rA_s} = (2,-4) = \overrightarrow{v_s}$ ($\overrightarrow{v_r} \; // \; \overrightarrow{A_rA_s}$). Entonces; r y s son paralelas e iguales (coincidentes)



Ejemplo c) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -2-2\alpha \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = 2+2\beta \\ y = -4-5\beta \end{cases}$ determina si tienen algún punto en común

De ambas rectas conocemos $r \begin{cases} A_r(1,-2) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-2) \end{cases}$ y $s \begin{cases} A_s(2,-4) \\ \overrightarrow{v_s} = (2,-5) \end{cases}$

$\overrightarrow{v_r} \nparallel \overrightarrow{v_s} \Leftrightarrow r$ y s son secantes en un punto P

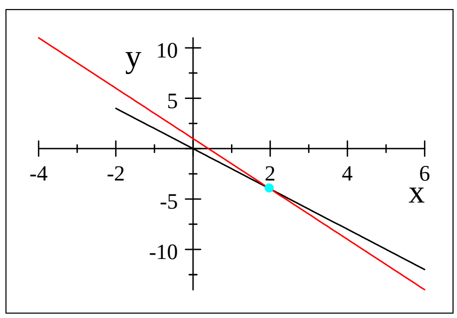
Dicho punto P se determina resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas

$$r \cap s \begin{cases} 1+\alpha = 2+2\beta \\ -2-2\alpha = -4-5\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = 1 \\ -2\alpha + 5\beta = -2 \end{cases}$$

Al resolverlo; obtenemos $\alpha = 1$ y $\beta = 0$. Sustituyendo los valores de los parámetros α y β en sus correspondientes ecuaciones parámetricas, obtendremos las coordenadas del punto P común a ambas rectas

$\begin{cases} x = 1+1 = 2 \\ y = -2-2 = -4 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2 \\ y = -4 \end{cases}$

Conclusión final $r \cap s = P = (2,-4)$



Ejemplo d) Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = 1+\alpha \\ y = -2-2\alpha \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = -2+2\beta \\ y = 2-5\beta \end{cases}$ determina si tienen algún punto en común

De ambas rectas conocemos $r \begin{cases} A_r(1,-2) \\ \overrightarrow{v_r} = (1,-2) \end{cases}$ y $s \begin{cases} A_s(-2,2) \\ \overrightarrow{v_s} = (2,-5) \end{cases}$

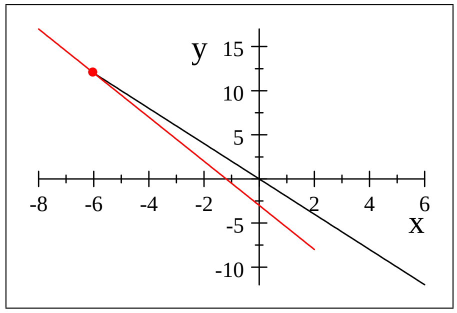
$\overrightarrow{v_r} \nparallel \overrightarrow{v_s} \Leftrightarrow r$ y s son secantes en un punto P

Dicho punto P se determina resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de ambas rectas

$$r \cap s \begin{cases} 1+\alpha = -2+2\beta \\ -2-2\alpha = 2-5\beta \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha - 2\beta = -3 \\ -2\alpha + 5\beta = 4 \end{cases}$$

Al resolverlo, obtenemos $\alpha = -7$ y $\beta = -2$. Sustituyendo los valoresde los parámetros α y β en sus correspondientes ecuaciones parámetricas, obtendremos las coordenadas del punto P común a ambas rectas

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 1 - 7 = -6 \\ y = -2 + 14 = 12 \end{array} \right. \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = -2 - 4 = -6 \\ y = 2 + 10 = 12 \end{array} \right.$$



<u>Rectas dadas por sus ecs. explícitas.</u> Dadas las rectas $r \to y = mx + b$ y $r' \to y = m\,'x + b\,'$

Para determinar la posición relativa de ambas rectas, bastará con resolver el sistema formado por las ecuaciones de r y s

$$r \cap s \left\{ \begin{array}{l} y = mx + b \\ y = m'x + b' \end{array} \right.$$

- Si $m \neq m\,'$ (pendientes diferentes) $\Leftrightarrow$El sistema es compatible determinado$\Leftrightarrow$ r y r' son secantes en un punto P (que se obtiene resolviendo el sistema)

- Si $\left[\begin{array}{c} m = m' \\ y \\ b = b' \end{array} \right]$ $\Leftrightarrow$El sistema es compatible indeterminado$\Longleftrightarrow$ r y r' son paralelas e iguales

- Si $\left[\begin{array}{c} m = m' \\ y \\ b \neq b' \end{array} \right]$ $\Leftrightarrow$El sistema es incompatible $\Longleftrightarrow$ r y r' son paralelas y distintas

Ejemplo a) Determina la posición relativa de las rectas $r \to y = \dfrac{2x}{3} - 4$ y

$s \to y = \dfrac{5x}{3} - 4$

Como sus pendientes son distintas, ambas rectas son secantes en un punto P que determinamos resolviendo el sistema.siguiente:

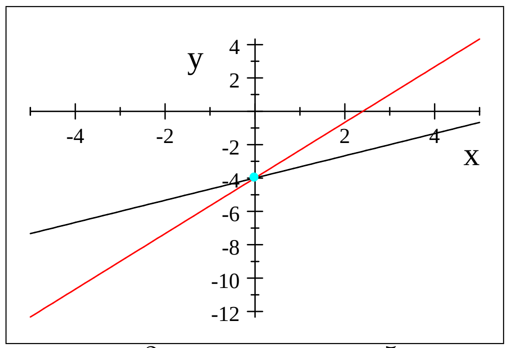
$$\left. \begin{array}{l} y = \dfrac{2x}{3} - 4 \\ y = \dfrac{5x}{3} - 4 \end{array} \right\}$$

Utilizando el método de igualación

$$\frac{2x}{3} - 4 = \frac{5x}{3} - 4 \rightarrow x = 0$$

Sustituyendo el valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones, tendremos que $y = -4$

Conclusión final $r \cap s = P = (0, -4)$



$r \rightarrow y = \frac{2x}{3} - 4 \quad s \rightarrow y = \frac{5x}{3} - 4$

Ejemplo b) Determina la posición relativa de las rectas $r \rightarrow y = 2x - 4$ y $s \rightarrow y = -\frac{5x}{3} + 5$

Como sus pendientes son distintas, ambas rectas son secantes en un punto P que determinamos resolviendo el sistema.siguiente:

$$\left.\begin{array}{r} y = 2x - 4 \\ y = -\frac{5x}{3} + 5 \end{array}\right\}$$

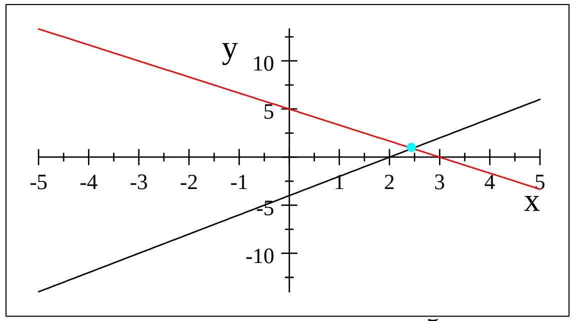
Utilizando el método de igualación

$$2x - 4 = -\frac{5x}{3} + 5 \rightarrow x = \frac{27}{11}$$

Sustituyendo el valor de x en cualquiera de las dos ecuaciones, tendremos que

$$y = 2\left(\frac{27}{11}\right) - 4 = \frac{10}{11}$$

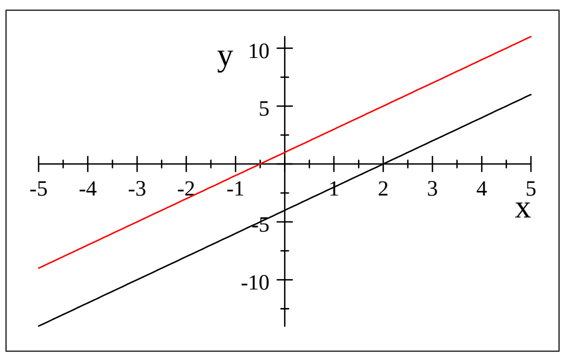
Conclusión final $r \cap s = P = (\frac{27}{11}, \frac{10}{11})$



$$r \to y = 2x - 4 \quad s \to y = -\frac{5x}{3} + 5$$

Ejemplo c) Determina la posición relativa de las rectas $r \to y = 2x - 4$ y $s \to y = 2x + 1$

Son paralelas y distintas



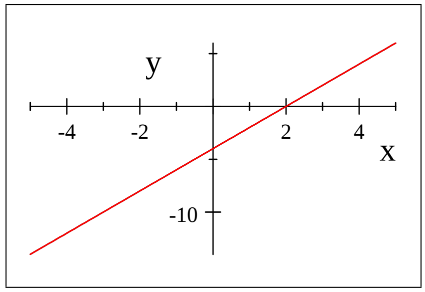
$r \to y = 2x - 4 \quad s \to y = 2x + 1$

Ejemplo d) Determina la posición relativa de las rectas $r \to y = 2x - 4$ y $s \to 4x - 2y - 8 = 0$

Como $s \to 4x - 2y - 8 = 0$.Aislando la y tendremos:

$$s \to y = \frac{4x - 8}{2} = 2x - 4$$

Las rectas son coincidentes (Paralelas e iguales)



$r = s \to y = 2x - 4$

Rectas dadas por sus ecs. cartesianas. Dadas las rectas $r \to Ax+By+C = 0$ y $r' \to A'x + B'y + C' = 0$

Para determinar la posición relativa de ambas rectas, bastará con resolver el sistema formado por las ecuaciones de r y s

$$r \cap s \left\{ \begin{array}{c} Ax + By + C \\ A'x + B'y + C' = 0 \end{array} \right.$$

- Si $AB' - A'B \neq 0 \Leftrightarrow$El sistema es compatible determinado$\Leftrightarrow$ r y r' son secantes en un punto P (que se obtiene resolviendo el sistema)
  r y r' son secantes en un punto $P \Leftrightarrow \dfrac{A'}{A} \neq \dfrac{B'}{B}$(siempre que podamos dividir)
- Si $AB' - A'B = 0$ y $AC' - A'C = 0 \Leftrightarrow$El sistema es compatible indeterminado$\Longleftrightarrow$ $r \,//\, r' \wedge r = r'$
  $r \,//\, r' \wedge r = r' \Longleftrightarrow \dfrac{A'}{A} = \dfrac{B'}{B} = \dfrac{C'}{C}$ (siempre que podamos dividir)
- Si $AB' - A'B = 0$ y $AC' - A'C \neq 0 \Leftrightarrow$El sistema es incompatible $\Longleftrightarrow r \,//\, r'$ $\wedge\, r \neq r'$
  $r \,//\, r' \wedge r \neq r' \Longleftrightarrow \dfrac{A'}{A} = \dfrac{B'}{B} \neq \dfrac{C'}{C}$(siempre que podamos dividir)

Ejemplo a) Determina la posición relativa de las rectas $r \to 3x - 2y + 1 = 0$ y $s \to x + y - 3 = 0$

Como$\frac{3}{1} \neq \frac{-2}{1}$, ambas rectas son secantes en un punto P
Dicho punto, lo determinamos resolviendo el sistema.siguiente:

$$\left. \begin{array}{c} 3x - 2y + 1 = 0 \\ x + y - 3 = 0 \end{array} \right\}$$

Utilizando el método de reducción (Multiplicamos la 2^a por 2)

$$\left.\begin{array}{l} 3x - 2y + 1 = 0 \\ 2x + 2y - 6 = 0 \end{array}\right\}$$

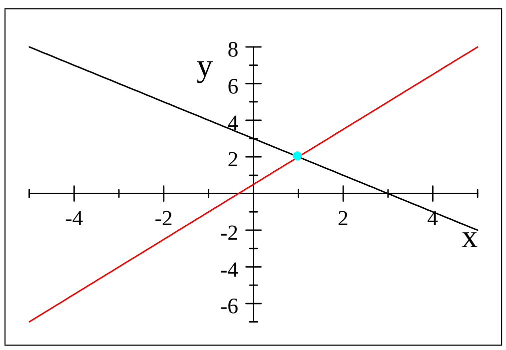
Sumando ambas ecuaciones:

$$5x - 5 = 0 \rightarrow x = 1$$

sustituyendo dicho valor en la 2^a ecuación

$$1 + y - 3 = 0 \rightarrow y = 2$$

Conclusión final $r \cap s = P = (1, 2)$



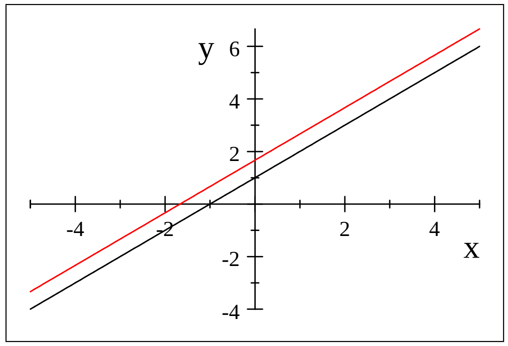
$3x - 2y - 1 = 0$ y $x + y - 3 = 0$

Ejemplo b) Determina la posición relativa de las rectas $r \rightarrow x - y + 1 = 0$ y $s \rightarrow -3x + 3y - 5 = 0$

Como $\begin{bmatrix} \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3} \\ y \\ \frac{1}{-3} \neq \frac{1}{5} \end{bmatrix}$ ambas rectas son paralelas y distintas

Nota: También lo podíamos haber determinado obteniendo las ecuaciones explícitas de ambas rectas

$$\begin{aligned} r &\rightarrow x - y + 1 = 0 \rightarrow y = x + 1 \\ s &\rightarrow -3x + 3y - 5 = 0 \rightarrow y = x + \frac{5}{3} \end{aligned}$$



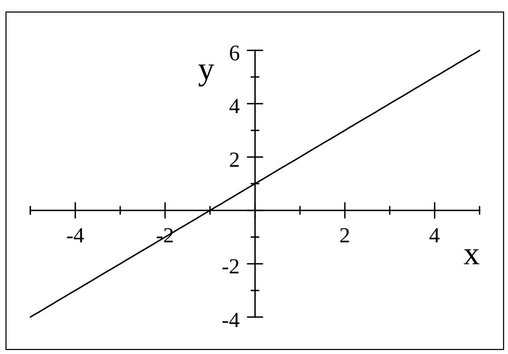
$x - y + 1 = 0$ y $-3x + 3y - 5 = 0$

Ejemplo c) Determina la posición relativa de las rectas $r \rightarrow x - y + 1 = 0$ y $s \rightarrow -3x + 3y - 3 = 0$

Como $\begin{bmatrix} \frac{1}{-3} = \frac{-1}{3} \\ y \\ \frac{1}{-3} = \frac{1}{-3} \end{bmatrix}$ entonces; ambas rectas son paralelas e iguales

Nota: También lo podíamos haber determinado obteniendo las ecuaciones explícitas de ambas rectas

$$\begin{aligned} r &\rightarrow x - y + 1 = 0 \rightarrow y = x + 1 \\ s &\rightarrow -3x + 3y - 3 = 0 \rightarrow y = x + 1 \end{aligned}$$



$x - y + 1 = 0$

2.9. Paralelismo entre dos rectas.

1. Dadas las rectas $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \end{cases}$ y $s \equiv \begin{cases} x = b_1 + \beta w_1 \\ y = b_2 + \beta w_2 \end{cases}$

$$r \; // \; s \Longleftrightarrow \overrightarrow{v_r} \; // \; \overrightarrow{v_s} \Leftrightarrow \text{Las componentes de ambos son proporcionales}$$

2. Dadas las rectas $r \equiv y = m_r x + b_r$ y $s \equiv y = m_s x + b_s$

$$r \mathbin{//} s \Longleftrightarrow m_r = m_s$$

3. Dadas las rectas $r \equiv Ax + By + C = 0$ y $s \equiv A'x + B'y + C' = 0$

Como sus vectores directores son: $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (-B, A) \\ \overrightarrow{v_s} = (-B', A') \end{array} \right.$
$r \mathbin{//} s \Leftrightarrow$Las componentes de $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son proporcionales

$$r \mathbin{//} s \Longleftrightarrow \frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} \text{ (siendo } A \neq 0 \text{ y } B \neq 0)$$

2.10. Recta paralela a otra pasando por un punto. Conocida una recta r , por alguna de sus ecuaciones, y un punto P cualesquiera del plano. Pretendemos obtener las ecuaciones de una recta s paralela a la anterior y que pase por el punto dado

Según las ecuaciones de la recta r dada se pueden presentar las siguientes situaciones

1. Dada la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \end{array} \right.$

Las ecuaciones paramétricas de otra recta, s, paralela a r y que pase por un punto $P(x_0, y_0)$ son :

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = x_0 + \alpha v_1 \\ y = y_0 + \alpha v_2 \end{array} \right.$$

ya que al ser paralela s a r el vector que determina su dirección es el mismo que el vector director de r

2. Dada la recta $r \equiv y = mx + b$

La ecuación explícita de todas las rectas paralelas a la anterior (han de tener la misma pendiente) es de la forma:

$$y = mx + k \text{ donde } k \text{ no lo conocemos}$$

Si de todas las rectas paralelas a r, sólo me interesa la recta, s, que pasa por $P(x_0, y_0)$.

Entonces, basta con sustituir las coordenadas del punto P en la ecuación y obtener k

$$y_0 = mx_0 + k \rightarrow k = y_0 - mx_0$$

Con lo que la ecuación de la recta s es de la forma:

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

Nota: Otra manera de obtener s es la siguiente:

$$s \left\{ \begin{array}{c} P(x_0, y_0) \\ m_s = m \text{ (pendiente de } r\text{, ya que } s \,//\, r) \end{array} \right.$$

La ecuación punto -pendiente de s es:

$$y - y_0 = m\,(x - x_0)$$

Su ecuación explícita es:

$$y = mx + y_0 - mx_0$$

3. Dada la recta $r \equiv Ax + By + C = 0$

La ecuación cartesiana de todas las rectas paralelas a la anterior es de la forma:

$$Ax + By + k = 0 \text{ donde } k \text{ no lo conocemos}$$

Si de todas las rectas paralelas a r; sólo me interesa la recta s que pasa por $P(x_0, y_0)$.

Entonces, basta con sustituir las coordenadas del punto P en la ecuación y obtener k

$$Ax_0 + By_0 + k = 0 \rightarrow k = -Ax_0 - By_0$$

Con lo que la ecuación cartesiana de la recta s es de la forma:

$$Ax + By - Ax_0 - By_0 = 0$$

Nota: Realizando una pequeña transformación en la ecuación anterior.

Fíjate como queda

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) = 0$$

Ejemplo a) Dada las recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 7 + \alpha \\ y = 8 - 2\alpha \end{array} \right.$ obtén las ecs.paramétricas de una recta s paralela a la anterior sabiendo que pasa por $P(-3, -5)$

Solución:
Como s es paralela a r →Podemos considerar que $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_r} = (1, -2)$

$$s \equiv \begin{cases} P(-3,-5) \\ \overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{v_r} = (1,-2) \end{cases} \rightarrow s \equiv \begin{cases} x = -3 + \alpha \\ y = -5 - 2\alpha \end{cases}$$

Ejemplo b) Dada la recta $r \equiv y = -\dfrac{4x}{3} + 5$ obtén la ec.explícita de una recta s paralela a la anterior sabiendo que pasa por $P(7, 8)$

Solución:
Como s es paralela a $r \rightarrow m_s = m_r = -\dfrac{4}{3}$

$$s \equiv \begin{cases} P(7,8) \\ m_s = m_r = -\dfrac{4}{3} \end{cases} \rightarrow s \equiv y - 8 = -\frac{4}{3}(x - 7)$$

Aislando y de su ecuación punto-pendiente, tendremos su ec. explícita:

$$y = -\frac{4}{3}(x-7) + 8 \rightarrow y = -\frac{4}{3}x + \frac{52}{3}$$

Nota: Como $m_r = -\dfrac{4}{3}$ entonces; la ecuación explícita de todas las rectas paralelas a la anterior es de la forma

$$y = -\frac{4}{3}x + k \text{ donde } k \in \mathbb{R}$$

De todas ellas; sólo me interesa la que pasa por $P(7, 8)$
Por lo tanto:

$$8 = -\frac{28}{3} + k \rightarrow 8 + \frac{28}{3} = k \rightarrow k = \frac{52}{3}$$

La ec.explícita de la recta pedida es:

$$y = -\frac{4}{3}x + \frac{52}{3}$$

Ejemplo c) Dada la recta $r \equiv 3x - 5y + 4 = 0$ obtén la ec.general (o implícita o cartesiana) de una recta s paralela a la anterior sabiendo que pasa por $P(6, -4)$

Solución:
La ec. general de todas las rectas paralelas a la recta r es de la forma:

$$3x - 5y + k = 0 \text{ donde } k \in \mathbb{R}$$

De todas ellas; sólo me interesa, la que pasa por $P(6,-4)$
Por lo tanto:

$$3 \cdot 6 - 5 \cdot (-4) + k = 0 \ \rightarrow k = -38$$

La ec.implícita de la recta pedida es:

$$3x - 5y - 38 = 0$$

2.11. Ángulo entre dos rectas.

Definición Llamaremos ángulo entre dos rectas r y s al menor de los ángulos entre $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ y $\overrightarrow{v_r}$ y -$\overrightarrow{v_s}$ donde $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son los vectores directores de ambas rectas

$$\alpha = ang(r,s) = \min\{\beta, \gamma \ / \ \beta = ang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s}) \text{ y } \gamma = ang(\overrightarrow{v_r}, -\overrightarrow{v_s})\}$$

Nota 1: De la definición se deduce que si $\alpha = ang(r,s)$; *entonces* $0^o \leq \alpha \leq 90^o$
Nota 2: r y s son paralelas $\Leftrightarrow$ $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$ son paralelos$\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{c} ang(\overrightarrow{v_r}\ ,\overrightarrow{v_s}) = 0^o \ (\overrightarrow{v_r} \text{ mismo sentido que } \overrightarrow{v_s}) \\ o \\ ang(\overrightarrow{v_r}\ ,\overrightarrow{v_s}) = 180^o \ (\overrightarrow{v_r} \text{ sentido contrario que } \overrightarrow{v_s}) \end{array}\right. \Leftrightarrow |\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}| = \|\overrightarrow{v_r}\| \cdot \|\overrightarrow{v_s}\| \Leftrightarrow$$

$\alpha = ang(r,s) = 0^o$
Nota 3: r y s son secantes en un punto $P \Leftrightarrow 0^o < \alpha = ang(r,s) < 90^o$
Nota 4: r y s son perpendiculares $\Leftrightarrow \overrightarrow{v_r} \perp \overrightarrow{v_s} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \Leftrightarrow \alpha = ang(r,s) = 90^o$

Comentario: Teniendo presente que para calcular el ángulo θ entre dos vectores $\overrightarrow{v_r}$ y $\overrightarrow{v_s}$, utilizamos la expresión siguiente:

$$\cos\theta = \frac{\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}}{\|\overrightarrow{v_r}\| \cdot \|\overrightarrow{v_s}\|} \text{ siendo } \theta = ang(\overrightarrow{v_r}, \overrightarrow{v_s})$$

1^a <u>Formula</u> angulo entre dos rectas *Podemos concluir; que el ángulo α entre dos rectas r y s se calcula mediante la fórmula siguiente*:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}\| \cdot \|\overrightarrow{v_s}\|} \text{ siendo } \alpha = ang(r,s) \qquad \text{(Angulo entre dos rectas)}$$

Ejemplo a) Determina el ángulo entre las rectas $r \equiv \left\{\begin{array}{l} x = 1 + \alpha \\ y = -2 - 2\alpha \end{array}\right.$ y $s \equiv \left\{\begin{array}{l} x = -2 + 2\beta \\ y = 2 - 5\beta \end{array}\right.$

Los vectores directores de ambas rectas son $\overrightarrow{v_r} = (1,-2)$, $\overrightarrow{v_s} = (2,-5)$

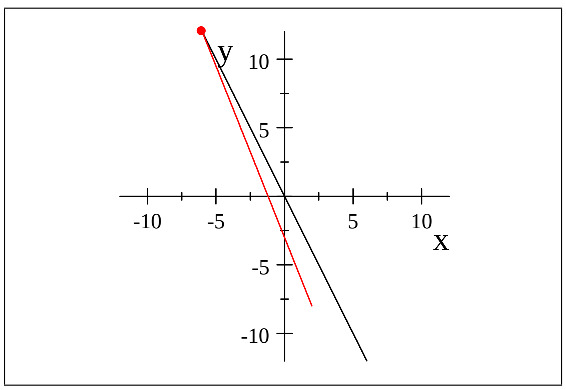
$$\text{Como} \left[\begin{array}{c} \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 2 + 10 = 12 \\ \|\overrightarrow{v_r}\| = \sqrt{1+4} = \sqrt{5} \\ \|\overrightarrow{v_s}\| = \sqrt{4+25} = \sqrt{29} \end{array} \right]$$

Entonces utilizando la relación $\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}\| \cdot \|\overrightarrow{v_s}\|}$ siendo $\alpha = ang(r,s)$; tendremos:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}\| \cdot \|\overrightarrow{v_s}\|} = \frac{12}{\sqrt{145}}$$

De donde:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{12}{\sqrt{145}}\right) \approx 4^o.45'\,49.1''$$



Nota: Es evidente que ambas rectas son secantes en un punto P (solución del sistema)

Ejemplo b) Determina el ángulo entre las rectas $r \equiv\ y = -\dfrac{2x}{3} + 4$ y $s \equiv\ y = 3x + 4$

Los vectores directores de ambas rectas son:

$$\overrightarrow{v_r} = (1, -\frac{2}{3}) \text{ y } \overrightarrow{v_s} = (1,3)$$

También se pueden considerar éstos (para simplificar cálculos):

$$\overrightarrow{v_r}' = 3\overrightarrow{v_r} = (3,-2) \text{ y } \overrightarrow{v_s} = (1,3)$$

$$\text{Como} \left[\begin{array}{c} \overrightarrow{v_r}' \cdot \overrightarrow{v_s} = 3 - 6 = -3 \\ \|\overrightarrow{v_r}'\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \\ \|\overrightarrow{v_s}\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \end{array} \right]$$

Entonces;utilizando la relación $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{v_r}' \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}'\| \cdot \|\overrightarrow{v_s}\|}$ siendo $\alpha = ang(r,s)$; tendremos:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r}' \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}'\| \cdot \|\overrightarrow{v_s}\|} = \frac{3}{\sqrt{130}}$$

De donde:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{3}{\sqrt{130}}\right) \approx 74^o.44'\,41.6''$$

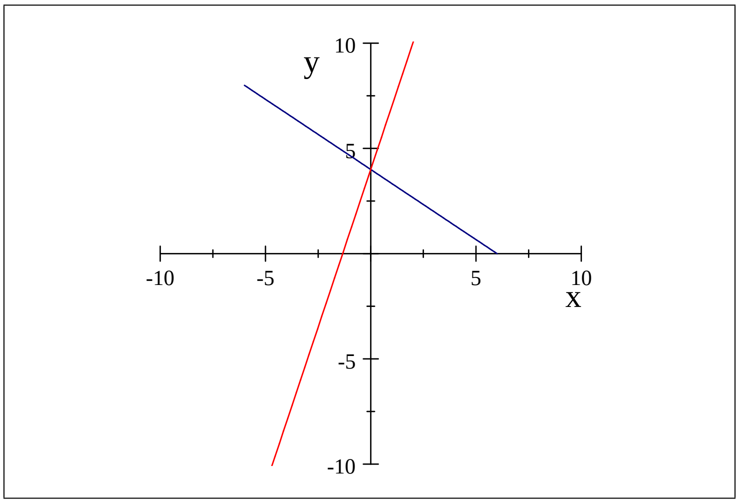


Figure 1: $y = -\dfrac{2x}{3} + 4$ y $y = 3x + 4$

Fíjate que las inclinaciones de ambas rectas son:

$$\text{La de } r \text{ es } \rho_r = \arctan\left(-\tfrac{2}{3}\right) \approx 146^o18'35.8''$$
$$\text{La de } s \text{ es } \rho_s = \arctan(3) \approx 71^o33'54.2''$$

En este ejercicio; podemos afirmar que

$$\alpha = \rho_r - \rho_s = 146^o18'35.8'' - 71^o33'54.2'' \approx 74^o44'41.6''$$

Compara este resultado con el obtenido anteriormente

Ejemplo c) Determina el ángulo entre las rectas $r \equiv\ y = \dfrac{2x}{3} + 4$ y $s \equiv\ y = 3x + 4$

Los vectores directores de ambas rectas son:

$$\overrightarrow{v_r} = (1, \frac{2}{3}) \text{ y } \overrightarrow{v_s} = (1,3)$$

También se pueden considerar éstos (para simplificar cálculos):

$$\overrightarrow{v_r}' = 3\overrightarrow{v_r} = (3,2) \text{ y } \overrightarrow{v_s} = (1,3)$$

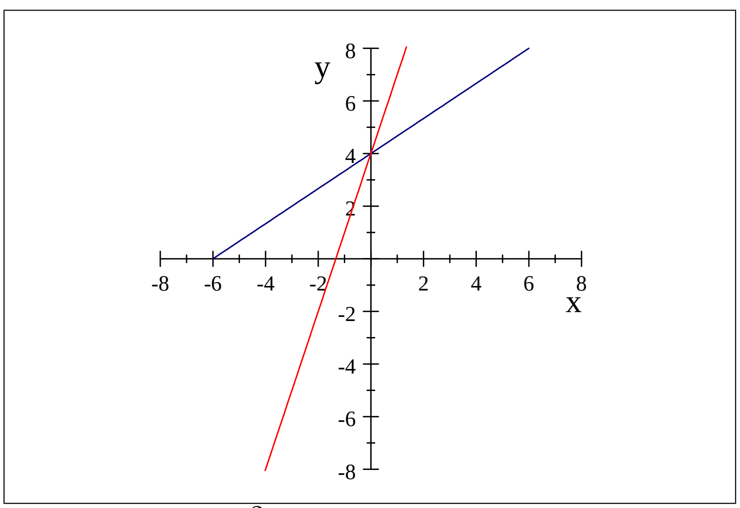
$$\text{Como} \left[\begin{array}{c} \overrightarrow{v_r}' \cdot \overrightarrow{v_s} = 3+6 = 9 \\ \|\overrightarrow{v_r}'\| = \sqrt{9+4} = \sqrt{13} \\ \|\overrightarrow{v_s}\| = \sqrt{1+9} = \sqrt{10} \end{array} \right]$$

Entonces; utilizando la relación $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{v_r}' \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}'\| \cdot \|\overrightarrow{v_s}\|}$ siendo $\alpha = ang(r,s)$; tendremos:

$$\cos\alpha = \frac{|\overrightarrow{v_r}' \cdot \overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}'\| \cdot \|\overrightarrow{v_s}\|} = \frac{9}{\sqrt{130}}$$

De donde:

$$\alpha = \arccos\left(\frac{9}{\sqrt{130}}\right) \approx 37^o.52'\,29.9''$$



$$y = \frac{2x}{3} + 4 \text{ y } \ y = 3x + 4$$

Fíjate que las inclinaciones de ambas rectas son:

$$\begin{array}{c} \text{La de } r \text{ es } \rho_r = \arctan\left(\frac{2}{3}\right) \approx 33^o\ 41'\ 24.2'' \\ \text{La de } s \text{ es } \rho_s = \arctan(3) \approx 71^o\ 33'\ 54.2'' \end{array}$$

A diferencia del ejercicio anterior en que $\alpha = \rho_r - \rho_s$ en éste; el ángulo $\alpha = ang(r,s)$ se calcula así:

$$\alpha = \rho_s - \rho_r = 71^o\ 33'\ 54.2'' - 33^o\ 41'\ 24.2'' \approx 37^o\ 52\text{'}\ 30''$$

Compara este resultado con el obtenido anteriormente.

Nota: De estos dos últimos ejercicios podemos deducir otro procedimiento para calcular el ángulo entre dos rectas r y s.

Para calcular el ángulo entre dos rectas, realizaremos los siguientes pasos

1^o Calculamos la inclinación de r. Recuerda que $\rho_r = \arctan(m_r)$ siendo m_r su pendiente

2^o Calculamos la inclinación de s. Recuerda que $\rho_s = \arctan(m_s)$ siendo m_s su pendiente

3^o El ángulo α entre las rectas r y s es:

$$\alpha = |\rho_r - \rho_s|$$

<u>2^a Formula</u> Angulo entre dos rectas $r \to y = m_r x + b_r$ y $s \to y = m_s x + b_s$

Demuestra que si $\alpha = ang(r,s)$ entonces:

$$\tan\alpha = \left|\frac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right|$$

Ayuda: Utiliza la siguiente relación $\tan(\rho_r - \rho_s) = \dfrac{\tan(\rho)_r - \tan(\rho_s)}{1 + \tan(\rho)_r \cdot \tan(\rho_s)}$ *.donde ρ_r y ρ_s son las inclinaciones de r y s respectivamente (recuerda que* $\tan(\rho_r) =$ *m_r y* $\tan(\rho_s) = m_s$*)*

Ejercicio d) Calcula el ángulo entre $r \to y = -5x + 2$ y $s \to y = -3x + 3$

Con las pendientes

Como $\begin{bmatrix} m_r = -5 \\ m_s = -3 \end{bmatrix}$ y $\tan\alpha = \left|\dfrac{m_r - m_s}{1 + m_r m_s}\right|$ donde $\alpha = ang(r,s)$

Tendremos

$$\tan\alpha = \left|\frac{-5 - (-3)}{1 + (-5)(-3)}\right| = \frac{1}{8}$$

Con lo que

$$\alpha = \arctan\left(\frac{1}{8}\right) \approx 7^o\ 7'\ 30''$$

Con los vectores

Como $\left[\begin{array}{c} \overrightarrow{v_r} = (1,-5) \\ \overrightarrow{v_s} = (1,-3) \end{array}\right]$ y $\cos\alpha = \dfrac{|\overrightarrow{v_r}\cdot\overrightarrow{v_s}|}{\|\overrightarrow{v_r}\|\cdot\|\overrightarrow{v_s}\|}$ siendo $\alpha = ang(r,s)$

Entonces:

$$\cos\alpha = \frac{16}{\sqrt{26}\sqrt{10}}$$

Con lo que

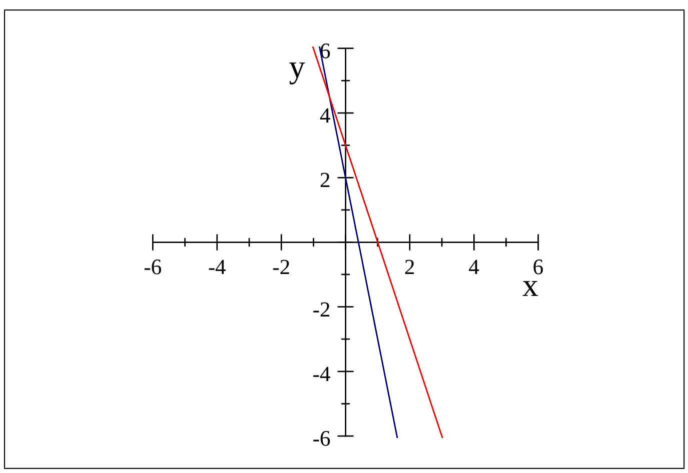
$$\alpha = \arccos\left(\frac{16}{\sqrt{26}\sqrt{10}}\right) \approx 7^o\ 7'\ 30''$$

Con las inclinaciones

$$\text{Como} \left[\begin{array}{c} \rho_r = \arctan(-5) \approx 101^o 18' 35.8'' \\ \rho_r = \arctan(-3) \approx 108^o 26' 5.8'' \end{array}\right]$$

Entonces; teniendo presente que el ángulo α entre las rectas r y s es:

$$\alpha = |\rho_r - \rho_s| \approx 108^o 26' 5.8'' - 101^o 18' 35.8'' \approx 7^o\ 7'\ 30''$$



$y = -5x + 2$ y $y = -3x + 3$

2.12. Perpendicularidad entre rectas.

1. Dadas las rectas r y s

$$\begin{array}{c} r \text{ y } \ s \text{ son perpendiculares} \\ \Updownarrow \\ ang(r,s) = 90^o \\ \Updownarrow \\ \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \\ \Updownarrow \\ \overrightarrow{v_r} \text{ y } \overrightarrow{v_s} \text{ son perpendiculares} \end{array}$$

Veamos ahora otra condición de perpendicularidad entre dos rectas de las cuales conocemos sus pendientes

2. Dadas las rectas r y s por sus ecs. explícitas $y = m_r x + b_r$ y $y = m_s x + b_s$ (tal que $m_r \neq 0$ y $m_s \neq 0$)

Sus vectores directores son$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (1, m_r) \\ \overrightarrow{v_s} = (1, m_s) \end{array} \right.$

Por la condición de perpendicularidad anterior; podemos afirmar que:

$$r \text{ y } s \text{ son perpendiculares} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \Leftrightarrow 1 + m_r \cdot m_s = 0 \Leftrightarrow m_r \cdot m_s = -1$$

Nota importante: La ecuación explícita de todas las rectas perpendiculares a la recta r es de la forma:

$$y = -\frac{1}{m}x + k \text{ donde } k \text{ no lo conocemos}$$

3. Dadas las rectas r y s por sus ecs. implícitas $Ax+By+C=0$ y $A'x+B'y+C'=0$

Sus vectores directores son$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{v_r} = (-B, A) \\ \overrightarrow{v_s} = (-B', A') \end{array} \right.$

Por la condición de perpendicularidad n^o 1; podemos afirmar que:

$$r \text{ y } s \text{ son perpendiculares} \Leftrightarrow \overrightarrow{v_r} \cdot \overrightarrow{v_s} = 0 \Leftrightarrow AA' + BB' = 0$$

Nota importante: Dada la recta $Ax + By + C = 0$ la ec. cartesiana de todas las rectas perpendiculares a la anterior es de la forma:

$$-Bx + Ay + K = 0 \text{ donde } K \text{ no lo conocemos}$$

2.13. Recta perpendicular a otra pasando por un punto. Conocida una recta r , por alguna de sus ecuaciones, y un punto P cualesquiera del plano. Pretendemos obtener las ecuaciones de una recta s perpendicular a la anterior y que pase por el punto dado

Según las ecuaciones de la recta r dada se pueden presentar las siguientes situaciones

1. Dada la recta $r \equiv \begin{cases} x = a_1 + \alpha v_1 \\ y = a_2 + \alpha v_2 \end{cases}$

Fíjate que el vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (v_1, v_2)$; entonces podemos considerar que un vector perpendicular a éste puede ser el vector $\overrightarrow{w} = (-v_2, v_2)$

Así pues la recta, s, perpendicular a r tiene de vector director $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{w} = (-v_2, v_2)$

Por lo que las ecuaciones paramétricas de esta recta, s, perpendicular a r y que pase por un punto $P(x_0, y_0)$ son :

$$s \equiv \begin{cases} x = x_0 - \alpha v_2 \\ y = y_0 + \alpha v_1 \end{cases}$$

2. Dada la recta $r \equiv y = mx + b$

La ecuación explícita de todas las rectas perpendiculares a la anterior (recuerda que $m_s = -\frac{1}{m_r}$ siendo $s \perp r$) es de la forma:

$$y = -\frac{1}{m}x + k \text{ donde } k \text{ no lo conocemos}$$

Si de todas las rectas perpendiculares a r, sólo me interesa la recta, s, que pasa por $P(x_0, y_0)$.

Entonces, basta con sustituir las coordenadas del punto P en la ecuación y obtener k

$$y_0 = -\tfrac{1}{m}x_0 + k \rightarrow k = y_0 + \tfrac{1}{m}x_0$$

Con lo que: la ecuación de la recta s es de la forma:

$$y = \frac{1}{m}x + y_0 + \frac{1}{m}x_0$$

Nota: Otra manera de obtener s es la siguiente:

$$s \begin{cases} P(x_0, y_0) \\ m_s = -\frac{1}{m} \text{ siendo } s \perp r \end{cases}$$

La ecuación punto -pendiente de s es:

$$y - y_0 = \frac{1}{m}(x - x_0)$$

Su ecuación explícita es:

$$y = \frac{1}{m}x + y_0 + \frac{1}{m}x_0$$

3. Dada la recta $r \equiv Ax + By + C = 0$

La ecuación cartesiana de todas las rectas perpendiculares a la anterior es de la forma:

$$-Bx + Ay + k = 0 \text{ donde } k \text{ no lo conocemos}$$

Si de todas las rectas perpendiculares a r; sólo me interesa la recta s que pasa por $P(x_0, y_0)$.

Entonces, basta con sustituir las coordenadas del punto P en la ecuación y obtener k

$$-Bx_0 + Ay_0 + k = 0 \to k = Bx_0 - Ay_0$$

Con lo que la ecuación cartesiana de la recta s es de la forma:

$$-Bx + Ay + Bx_0 - Ay_0 = 0$$

Nota: Realizando una pequeña transformación en la ecuación anterior.

Fíjate como queda

$$-B(x - x_0) + A(y - y_0) = 0$$

Ejemplo a) Dada las recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 7 + \alpha \\ y = 8 - 2\alpha \end{array} \right.$ obtén las ecs.paramétricas de una recta s perpendicular a la anterior sabiendo que pasa por $P(-3, -5)$

Solución:

El vector director de r es $\overrightarrow{v_r} = (1, -2)$

Un vector ortogonal a él es $\overrightarrow{w} = (2, 1)$

Como s es perpendicular a r $\to$Podemos considerar que $\overrightarrow{v_s} = \overrightarrow{w} = (2, 1)$

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{c} P(-3, -5) \\ \overrightarrow{v_s}(2, 1) \end{array} \right. \to s \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = -3 + 2\alpha \\ y = -5 + 1\alpha \end{array} \right.$$

Ejemplo b) Dada la recta $r \equiv y = -\dfrac{4x}{3} + 5$ obtén la ec.explícita de una recta s paralela a la anterior sabiendo que pasa por $P(7,8)$

Solución:
Como s es perpendicular a $r \rightarrow m_s = -\frac{1}{m_r} = \dfrac{3}{4}$

$$s \equiv \left\{ \begin{array}{c} P(7,8) \\ m_s = -\frac{1}{m_r} = \dfrac{3}{4} \end{array} \right. \rightarrow s \equiv y - 8 = \frac{3}{4}(x-7)$$

Aislando y de su ecuación punto-pendiente, tendremos su ec. explícita:

$$y = \frac{3}{4}(x-7) + 8 \rightarrow y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

Nota: Como $m_r = -\dfrac{4}{3}$ entonces; la ecuación explícita de todas las rectas perpendiculares a la anterior es de la forma

$$y = \frac{3}{4}x + k \text{ donde } k \in \mathbb{R}$$

De todas ellas; sólo me interesa la que pasa por $P(7,8)$
Por lo tanto:

$$8 = \frac{21}{4} + k \rightarrow 8 - \frac{21}{4} = k \rightarrow k = \frac{11}{4}$$

La ec.explícita de la recta pedida es:

$$y = \frac{3}{4}x + \frac{11}{4}$$

Ejemplo c) Dada la recta $r \equiv 3x - 5y + 4 = 0$ obtén la ec.general (o implícita o cartesiana) de una recta s perpendicular a la anterior sabiendo que pasa por $P(6,-4)$

Solución:
La ec. general de todas las rectas perpendiculares a la recta r es de la forma:

$$5x + 3y + k = 0 \text{ donde } k \in \mathbb{R}$$

De todas ellas; sólo me interesa la que pasa por $P(6,-4)$
Por lo tanto:

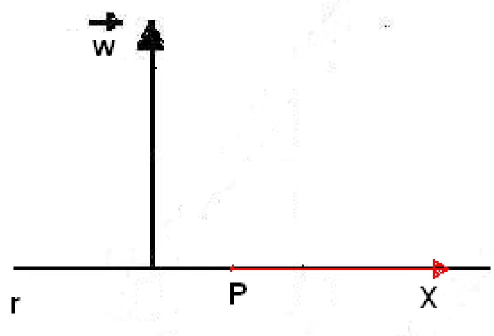
$$5{\cdot}6 + 3{\cdot}(-4) + k = 0 \ \rightarrow k = -18$$

La ec.implícita de la recta pedida es:

$$5x + 3y - 18 = 0$$

2.14. Recta a partir de un vector ortogonal y un punto. Una recta queda determinada de forma única si conocemos las componentes de un vector $\overrightarrow{w} = (A, B)$ perpendicular a ésta ($\overrightarrow{w} \perp r$) y un punto $P(x_0, y_0)$ de ésta

Sea $r \equiv \begin{cases} P(x_0, y_0) \\ \overrightarrow{w} = (A, B) \text{ tal que } \overrightarrow{w} \perp r \end{cases}$



Por definición

$$r = \left\{X \in \mathbb{R}^2 \ / \ \overrightarrow{PX} \perp \overrightarrow{w}\right\} = \left\{X \in \mathbb{R}^2 \ / \ \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{PX} = 0\right\}$$

Sea $X = (x, y)$ un punto genérico de r.Como $\overrightarrow{PX} = (x - x_0, y - y_0)$; entonces, al verificarse que

$$\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{PX} = 0$$

Tendremos, la ecuación cartesiana de la recta en cuestión:

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0$$

Operando, obtendremos una expresión del tipo

$$Ax + By + C = 0 \text{ donde } C = -(Ax_0 + By_0)$$

Nota 1: Dada la recta $r \equiv Ax + By + C = 0$. El vector $\overrightarrow{w} = (A, B)$ es un vector ortogonal a r

Ejemplo a) Determina la ecuación cartesiana de una recta perpendicular al vector $\overrightarrow{w} = (1, 7)$ sabiendo que pasa por el punto $P(-3, 4)$

$$\text{Como } r = \left\{X \in \mathbb{R}^2 \ / \ \overrightarrow{PX} \perp \overrightarrow{w}\right\} = \left\{X \in \mathbb{R}^2 \ / \ \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{PX} = 0\right\}$$

$$\left[\begin{array}{c} \overrightarrow{w} = (1, 7) \text{ donde } \overrightarrow{w} \perp r \\ \text{Sea } X = (x, y)\text{un punto genérico de } r \to \overrightarrow{PX} = (x + 3, y - 7) \\ \overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{PX} = 0 \to (1, 7) \cdot (x + 3, y - 7) = 0 \end{array}\right]$$

Tendremos, la ecuación cartesiana de la recta en cuestión:

$$1(x+3)+7(y-7)=0$$

Operando, obtendremos:

$$x+7y-46=0$$

Ejemplo b) Determina la ecuación cartesiana de la mediatriz del segmento de extremos $P(2,1)$ y $Q(-1,3)$

La mediatriz del segmento de extremos P y Q es la recta perpendicular al segmento PQ que pasa por el punto medio de éste.

Así pues esta recta es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ}=(-3,2)$ y pasa por su punto medio $H(\frac{2-1}{2},\frac{3+1}{4})$

$$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} H(\frac{1}{2},2) \\ \overrightarrow{PQ}=(-3,2) \text{ es } \perp \text{ a } r \end{array} \right. \rightarrow r \equiv -3(x-\tfrac{1}{2})+2(y-2)=0$$

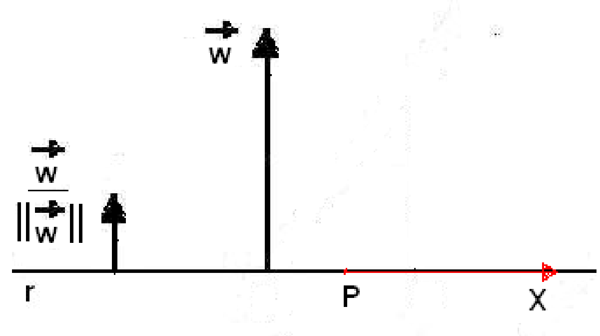
Multiplicando por 2 y ordenando términos:

$$-6x+4y=5$$

2.15. Ecuación normal de una recta. *Si en vez de considerar el vector* $\overrightarrow{w}=(A,B)$ *en todo el proceso anterior*; *consideramos el vector unitario* $\frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}=(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}})$ *(recuerda que* $\|\overrightarrow{w}\|=\sqrt{A^2+B^2}$*)*

tendremos :

$$r=\left\{X\in\mathbb{R}^2 \;/\; \overrightarrow{PX}\perp\frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}\right\}=\left\{X\in\mathbb{R}^2 \;/\; \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}\cdot\overrightarrow{PX}=0\right\}$$



siendo; entonces su ecuación cartesiana:

$$\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}(x-x_0)+\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}(y-y_0)=0$$

Operando, obtendremos lo que se denomina ecuación normal de una recta

$$\frac{A\ x}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{B\ y}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0 \text{ donde } C=-(Ax_0+By_0)$$

*Nota: A partir de la ec. cartesiana $Ax+By+C=0$ bastará con dividir toda la ecuación por $\|\overrightarrow{w}\|=\sqrt{A^2+B^2}$ (***donde*** $\overrightarrow{w}=(A,B)$ ***es el vector perpendicular a*** r) para obtener su ec.normal*

Ejemplo a) Determina la ecuación normal de una recta perpendicular al vector $\overrightarrow{w}=(5,-7)$ sabiendo que pasa por el punto $P(-3,4)$

$$\text{Como } r=\left\{X\in\mathbb{R}^2\ /\ \overrightarrow{PX}\perp\frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}\right\}=\left\{X\in\mathbb{R}^2\ /\ \frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}\cdot\overrightarrow{PX}=0\right\}$$

$$\left[\begin{array}{c}\frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}=\left(\frac{5}{\sqrt{74}},\frac{-7}{\sqrt{74}}\right) \text{ ya que } \|\overrightarrow{w}\|=\sqrt{25+49}=\sqrt{74}\\ \text{Sea } X=(x,y) \text{ un punto genérico de } r\rightarrow\overrightarrow{PX}=(x+3,y-4)\\ \overrightarrow{PX}\cdot\frac{\overrightarrow{w}}{\|\overrightarrow{w}\|}=0\rightarrow\left(\frac{5}{\sqrt{74}},\frac{-7}{\sqrt{74}}\right)\cdot(x+3,y-4)=0\end{array}\right]$$

Tendremos, **la ecuación normal** de la recta en cuestión:

$$\frac{5}{\sqrt{74}}(x+3)-\frac{7}{\sqrt{74}}(y-4)=0$$

Que operando se transforma en:

$$\frac{5x}{\sqrt{74}}+\frac{7y}{\sqrt{74}}+\frac{43}{\sqrt{74}}=0$$

2.16. Proyección ortogonal de un punto sobre una recta.

Definicion: Dada la recta r y un punto P.Llamaremos proyección ortogonal de P sobre la recta r al punto H que verifica las siguientes condiciones:

a) $H\in r$ (H es un punto de r)

b) El vector $\overrightarrow{PH}$ es perpendicular a r

Nota: Para calcular la proyección ortogonal de P sobre la recta r utilizaremos las dos condiciones anteriores de la definición o bien realizaremos los siguientes pasos:

1. Calcularemos la recta s que pase por P y sea perpendicular a r
2. Resolveremos el sistema formado por ambas ecuaciones ($H=r\cap s$)

2.17. Simétrico de un punto respecto de una recta.

Definición: Llamaremos simétrico del punto P con respecto a la recta r al punto P' tal que el punto, H, proyección ortogonal de P sobre r es el punto medio del segmento de extremos P y P'

Nota: Para calcular el simétrico del punto P con respecto a la recta r realizaremos los siguientes pasos:

1. Determinaremos el punto H (proyección ortogonal de P sobre r) por los procedimientos explicados en el apartado anterior
2. Determinaremos P' teniendo presente que H es el punto medio del segmento de extremos P y P' (Recuerda que $\overrightarrow{OH} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OP} + \overrightarrow{OP'}\right) \rightarrow \overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP}$)

Ejemplo a) Dada la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \alpha \\ y = 3 + 4\alpha \end{array} \right.$ y el punto $P(1, -1)$.
a)Determina la proyección ortogonal de P sobre r
b)El simétrico de P con respecto a r

Solución apartado a

Primer método Llamemos H a dicho punto

Por ser H la proyección ortogonal de P sobre r; entonces se verifica

$$\left\{ \begin{array}{c} H \in r \\ y \\ \overrightarrow{PH} \text{ es perpendicular a } r \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} H \in r \\ y \\ \overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{v_r} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} H = (2 - \alpha, 3 + 4\alpha) \\ y \\ \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \end{array} \right\}$$

Fíjate que $\overrightarrow{PH} = (2 - \alpha - 1, 3 + 4\alpha - (-1)) = (1 - \alpha, 4\alpha + 4)$ y que $\overrightarrow{v_r} = (-1, 4)$
Como $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Leftrightarrow (1 - \alpha, 4\alpha + 4) \cdot (-1, 4) = 0 \Leftrightarrow -1 + \alpha + 16\alpha + 16 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{15}{17}$
Sustituyendo el valor de α en las ecs. paramétricas de r tendremos que:

$$H = \left(2 - \left(-\frac{15}{17}\right), 3 + 4\left(-\frac{15}{17}\right)\right) = \left(\frac{49}{17}, -\frac{9}{17}\right)$$

Segundo método

1^o Calcularemos la recta s que pase por $P(1, -1)$ y sea perpendicular a $r \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \alpha \\ y = 3 + 4\alpha \end{array} \right.$

Como el vector director de r es $v_r = (-1, 4)$ →su pendiente vale $m_r = -4$
La pendiente de cualquier recta perpendicular a r valdrá $\frac{1}{4}$
Como s es $\perp$ a r y $P \in s \Leftrightarrow s \equiv \begin{cases} m_s = \frac{1}{4} \\ P(1, -1) \in s. \end{cases}$
Luego su ec. explícita es

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x - 1) \rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$$

2^o Resolveremos el sistema formado por ambas ecuaciones ($H = r \cap s$)

$$H = r \cap s \equiv \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 3 + 4\alpha \\ y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \end{cases}$$

Si los valores de x e y, de las dos primeras ecuaciones, los sustituimos en la 3^a ec obtenemos la siguiente ecuación:

$$3 + 4\alpha = \frac{1}{4}(2 - \alpha) - \frac{5}{4}$$

Resoviendo esta ecuación; tendremos:

$$\alpha = -\frac{15}{17}$$

Con lo que

$$H = \left(2 - \left(-\frac{15}{17}\right), 3 + 4\left(-\frac{15}{17}\right)\right) = \left(\frac{49}{17}, -\frac{9}{17}\right)$$

Solución apartado b

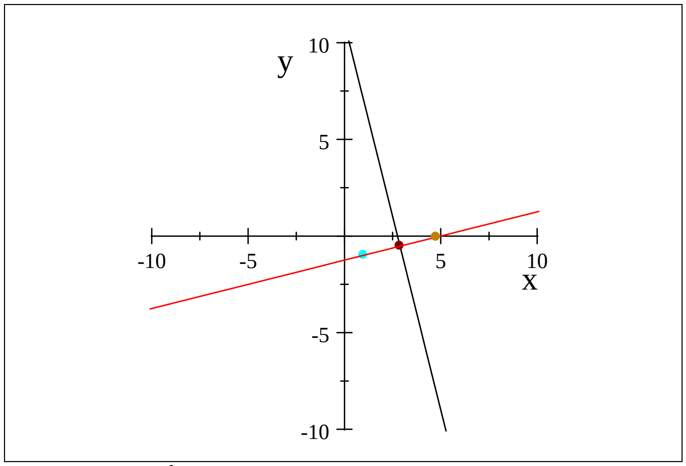
Calculemos ahora el punto P' simétrico de P con respecto a r

$$\left.\begin{array}{c} H\left(\frac{49}{17}, -\frac{9}{17}\right) \\ P(1, -1) \end{array}\right\} \rightarrow \left.\begin{array}{c} \overrightarrow{OH} = \left(\frac{49}{17}, -\frac{9}{17}\right) \\ \overrightarrow{OP} = (1, -1) \end{array}\right\}$$

H es el punto medio del segmento de extremos P y P' (Recuerda que $\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP}$)

$$\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} = 2\left(\frac{49}{17}, -\frac{9}{17}\right) - (1, -1) = \left(\frac{81}{17}, -\frac{1}{17}\right)$$

$$P'\left(\frac{81}{17}, -\frac{1}{17}\right)$$



$$r \equiv \begin{cases} x = 2 - \alpha \\ y = 3 + 4\alpha \end{cases} \quad s \equiv y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$$

Ejemplo b) Dada la recta $r \equiv y = \frac{2}{3}x - 5$ y el punto $P(3, -5)$.

a)Determina la proyección ortogonal de P sobre r

b) Simétrico de P con respecto a la recta r

Solución apartado a

Primer método Llamemos H a dicho punto

Por ser H la proyección ortogonal de P sobre r; entonces se verifica

$$\left\{ \begin{array}{c} H \in r \\ y \\ \overrightarrow{PH} \text{ es perpendicular a } r \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} H \in r \\ y \\ \overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{v_r} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} H = (x, \frac{2}{3}x - 5) \\ y \\ \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \end{array} \right\}$$

Fíjate que $\overrightarrow{PH} = (x - 3, \frac{2}{3}x - 5 - (-5)) = \left(x - 3, \frac{2}{3}x\right)$ y que $\overrightarrow{v_r} = (3, 2)$
Como $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Leftrightarrow \left(x - 3, \frac{2}{3}x\right)(3, 2) = 0 \Leftrightarrow 3(x - 3) + 2\left(\frac{2}{3}x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{27}{13}$
Sustituyendo el valor de x en las ecs. explícitas de r tendremos que:

$$H = \left(\frac{27}{13}, \frac{2}{3}\left(\frac{27}{13}\right) - 5\right) = \left(\frac{27}{13}, -\frac{47}{13}\right)$$

Segundo método

1. Calcularemos la recta s que pase por $P(3, -5)$ y sea perpendicular a r$\equiv y = \frac{2}{3}x - 5$

La pendiente de r vale $m_r = \frac{2}{3}$
La pendiente de cualquier recta perpendicular a r valdrá $-\frac{3}{2}$
Como s es $\perp$ a r y $P \in s \Leftrightarrow s \equiv \left\{ \begin{array}{c} m_s = -\frac{3}{2} \\ P(3,-5) \in s. \end{array} \right.$
Luego su ec. explícita es

$$y + 5 = -\frac{3}{2}(x-3) \rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

2. Resolveremos el sistema formado por ambas ecuaciones ($H = r \cap s$)

$H = r \cap s \equiv \left\{ \begin{array}{c} y = \frac{2}{3}x - 5 \\ y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{array} \right.$
Resolviéndolo por igualación, obtendremos la ecuación

$$\frac{2}{3}x - 5 = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

Cuya solución es:

$$x = \frac{27}{13}$$

Con lo que

$$H = \left(\frac{27}{13}, \frac{2}{3}\left(\frac{27}{13}\right) - 5\right) = \left(\frac{27}{13}, -\frac{47}{13}\right)$$

Solución apartado b

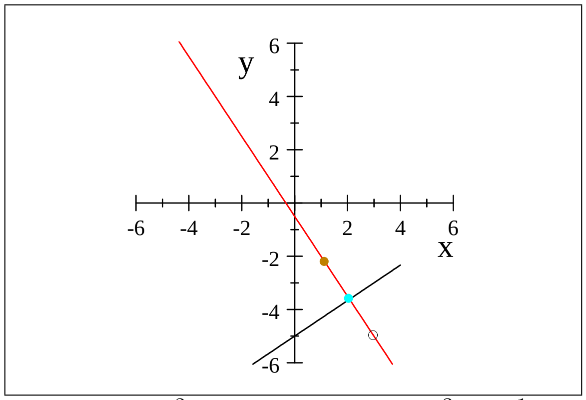
Calculemos ahora el punto P' simétrico de P con respecto a r

$$\left. \begin{array}{c} H\left(\frac{27}{13}, -\frac{47}{13}\right) \\ P(3,-5) \end{array} \right\} \rightarrow \left. \begin{array}{c} \overrightarrow{OH} = \left(\frac{27}{13}, -\frac{47}{13}\right) \\ \overrightarrow{OP} = (3,-5) \end{array} \right\}$$

H es el punto medio del segmento de extremos P y P' (Recuerda que $\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP}$)

$$\overrightarrow{OP'} = 2\overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OP} = 2\left(\frac{27}{13}, -\frac{47}{13}\right) - (3,-5) = \left(\frac{15}{13}, -\frac{29}{13}\right)$$

$$P'\left(\frac{15}{13}, -\frac{29}{13}\right)$$



$r \equiv y = \frac{2}{3}x - 5$ y $s \equiv y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$

Ejemplo c) Dada la recta $r \equiv 3x + y + 2 = 0$ y el punto $P(2, -3)$.
a)Determina la proyección ortogonal de P sobre r
b) Simétrico de P con respecto a la recta r

Solución apartado a

Primer método Llamemos H a dicho punto

Por ser H la proyección ortogonal de P sobre r; entonces se verifica

$$\left\{ \begin{array}{c} H \in r \\ y \\ \overrightarrow{PH} \text{ es perpendicular a } r \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} H \in r \\ y \\ \overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{v_r} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} H = (x, -3x - 2) \\ y \\ \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \end{array} \right\}$$

Fíjate que $\overrightarrow{PH} = (x - 2, -3x - 2 - (-3)) = (x - 2, -3x + 1)$ y que $\overrightarrow{v_r} = (-1, 3)$
Como $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Leftrightarrow (x - 2, -3x + 1)(-1, 3) = 0 \Leftrightarrow -1(x - 2) + 3(-3x + 1) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$
Sustituyendo el valor de x en las coordenadas del punto H. tendremos que:

$$H = \left(\frac{1}{2}, -3\left(\frac{1}{2}\right) - 2\right) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}\right)$$

Segundo método

1. Calcularemos la recta s que pase por $P(2, -3)$ y sea perpendicular a $r \equiv 3x + y + 2 = 0$

La ec cartesiana de cualquier recta perpendicular a r es de la forma

$$-x+3y+k=0$$

Como sólo nos interesa la que pasa por $P(2,-3)$ entonces:

$$-2-9+k=0\to k=11$$

Luego su ec. cartesiana de la recta s que pasa por P y es explícita es perpendicular a r es :

$$-x+3y+11=0$$

2. Resolveremos el sistema formado por ambas ecuaciones ($H=r\cap s$)

$H=r\cap s\equiv\left\{\begin{array}{c}3x+y+2=0\\-x+3y+11=0\end{array}\right.$, Solution is: $\left[x=\frac{1}{2},y=-\frac{7}{2}\right]$

Resolviéndolo por reducción (multiplicamos la 2^a por 3 y sumando ambas ecuaciones)

$$10y+35=0\to y=-\frac{7}{2}$$

Sustituyendo el valor de y en la 2^a ec.

$$-x+3\left(-\frac{7}{2}\right)+11=0\to\frac{1}{2}=x$$

Con lo que

$$H=\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)$$

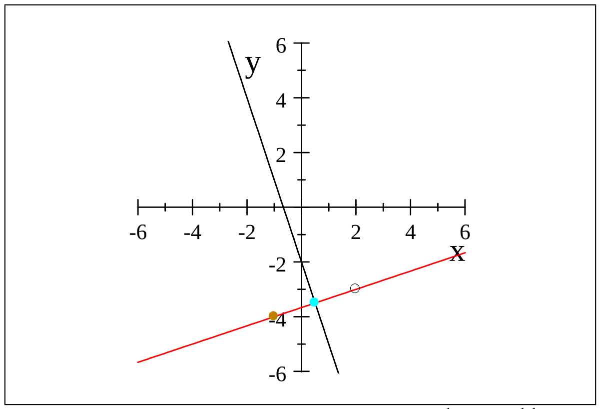
Solución apartado b

Calculemos ahora el punto P' simétrico de P con respecto a r

$$\left.\begin{array}{c}H\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)\\P(2,-3)\end{array}\right\}\to\left.\begin{array}{c}\overrightarrow{OH}=\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)\\\overrightarrow{OP}=(2,-3)\end{array}\right\}$$

H es el punto medio del segmento de extremos P y P' (Recuerda que $\overrightarrow{OP'}=2\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP}$)

$$\begin{array}{c}\overrightarrow{OP'}=2\overrightarrow{OH}-\overrightarrow{OP}=2\left(\frac{1}{2},-\frac{7}{2}\right)-(2,-3)=(-1,-4)\\P'(-1,-4)\end{array}$$



$r \equiv y = -3x - 2$ y $s \equiv y = \frac{1}{3}x - \frac{11}{3}$

3. Distancia entre dos puntos

Definición: Distancia entre dos puntos

Se define la distancia entre dos puntos P y Q de $\mathbb{R}^2$como el módulo del vector que los une

$$d(P,Q)=\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|$$

Si trabajamos en el sistema de referencia canónico su expresión analítica quedará de la siguiente manera:

Si las coodenadas de ambos puntos en el sistema canónico son $P(a,b), Q(a',b') \rightarrow \overrightarrow{PQ}=(a'-a,b'-b)$ y por lo tanto

$$d(P,Q)=\left\|\overrightarrow{PQ}\right\|=\sqrt{(a'-a)^2+(b'-b)^2}$$

Ejemplo Dados los puntos $A(2,2)$ y $H=\left(\frac{7}{6},\frac{22}{6}\right)$.Calcula la distancia entre ellos

Como el vector $\overrightarrow{AH}=\left(-\frac{5}{6},\frac{10}{6}\right)$

$$d(A,H)=\left\|\overrightarrow{AH}\right\|=\sqrt{\left(-\frac{5}{6}\right)^2+\left(\frac{10}{6}\right)^2}=\frac{5\sqrt{5}}{6}$$

3.1. Propiedades de la distancia entre dos puntos.

1. $d(P,Q)=d(Q,P) \qquad \forall P,Q\in\Re^2$
2. $d(P,Q)\geq 0 \qquad \forall P,Q\in\Re^2$
3. $d(P,Q)=0 \Longleftrightarrow P=Q$
4. Fijados los puntos P y Q $d(P,Q)\leq d(P,R)+d(R,Q) \qquad \forall R\in\Re^2$

Cuestión a) Dados los puntos $P(2,1)$ y $Q(-1,3)$. Determina el lugar geométrico de los puntos que equidistan de P *y* Q

Nos están pidiendo los puntos $R(x,y)$ tales que $d(P,R)=d(Q,R)$

$$\text{Como } \left.\begin{array}{l}\overrightarrow{PR}=(x-2,y-1)\\ \overrightarrow{QR}=(x+1,y-3)\end{array}\right\}\rightarrow \left.\begin{array}{l}\left\|\overrightarrow{PR}\right\|=\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}\\ \left\|\overrightarrow{QR}\right\|=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}\end{array}\right\}\rightarrow$$

$$\sqrt{(x-2)^2+(y-1)^2}=\sqrt{(x+1)^2+(y-3)^2}$$

Elevando al cuadrado y desarrollando tendremos

$$x^2-4x+5+y^2-2y=x^2+2x+10+y^2-6y$$

Transponiendo términos y reduciendo términos semejantes obtendremos la recta

$$r \equiv 6x - 4y = -5$$

A esta recta se le denomina recta mediatriz de los puntos P y Q

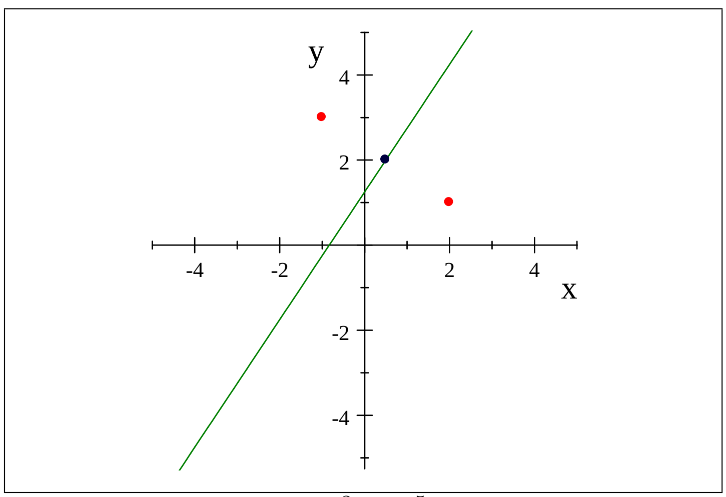
Nota: La mediatriz del segmento de extremos P y Q es la recta perpendicular al segmento PQ que pasa por el punto medio de éste.

Así pues; esta recta es perpendicular al vector $\overrightarrow{PQ} = (-3, 2)$ y pasa por su punto medio $H(\frac{2-1}{2}, \frac{3+1}{4})$

$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} H(\frac{1}{2}, 2) \\ \overrightarrow{PQ} = (-3, 2) \text{ es } \perp \text{ a } r \end{array} \right. \rightarrow r \equiv -3(x - \frac{1}{2}) + 2(y - 2) = 0$

Multiplicando por -2 y ordenando términos:

$$6x - 4y = -5$$



$y = \frac{3}{2}x + \frac{5}{4}$

Cuestión b) Dado el punto $P(2, 1)$. Determina el lugar geométrico de los puntos cuya distancia a P es de 3 unidades

Nos están pidiendo los puntos $R(x, y)$ tales que $d(P, R) = 3 \rightarrow \left\| \overrightarrow{PR} \right\| = 3$

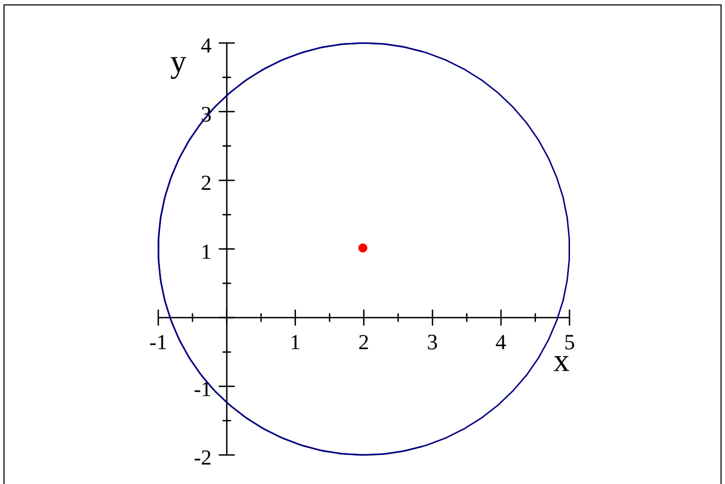
Como $\overrightarrow{PR} = (x - 2, y - 1)$ entonces tendremos

$$\sqrt{(x-2)^2 + (y-1)^2} = 3$$

Elevando al cuadrado

$$(x-2)^2+(y-1)^2=9$$

Esta ecuación representa todos los puntos de una circunferencia centrada en $P(2,1)$ y de radio 3 unidades



$$(x-2)^2+(y-1)^2=9$$

Cuestión c) Dados los puntos $F(3,0)$ y $F'\ (-3,0)$. Determina el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a F y F' sea de 10 unidades

Nos están pidiendo los puntos $P(x,y)$ tales que $d(F,P)+d(F',P)=10$

$$\left\|\overrightarrow{FP}\right\|+\left\|\overrightarrow{F'P}\right\|=10 \qquad \text{(a)}$$

Como $\left[\begin{array}{c}\left.\begin{array}{c}\overrightarrow{FP}=(x-3,y)\\ \overrightarrow{F'P}=(x+3,y)\end{array}\right\}\end{array}\right]$ entonces $\left[\begin{array}{c}\left\|\overrightarrow{FP}\right\|=\sqrt{(x-3)^2+y^2}\\ \left\|\overrightarrow{F'P}\right\|=\sqrt{(x+3)^2+y^2}\end{array}\right]$

Sustituyendo en (a); tendremos

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}+\sqrt{(x+3)^2+y^2}=10$$

Aislamos una raíz

$$\sqrt{(x-3)^2+y^2}=10-\sqrt{(x+3)^2+y^2}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros

$$(x-3)^2+y^2=100-20\sqrt{(x+3)^2+y^2}+(x+3)^2+y^2$$

Desarrollando, transponiendo y eliminando términos semejantes:

$$20\sqrt{(x+3)^2+y^2}=100+12x$$

Dividiendo por 4

$$5\sqrt{(x+3)^2+y^2}=25+3x$$

Elevando al cuadrado los dos términos

$$25\left((x+3)^2+y^2\right)=625+150x+9x^2$$

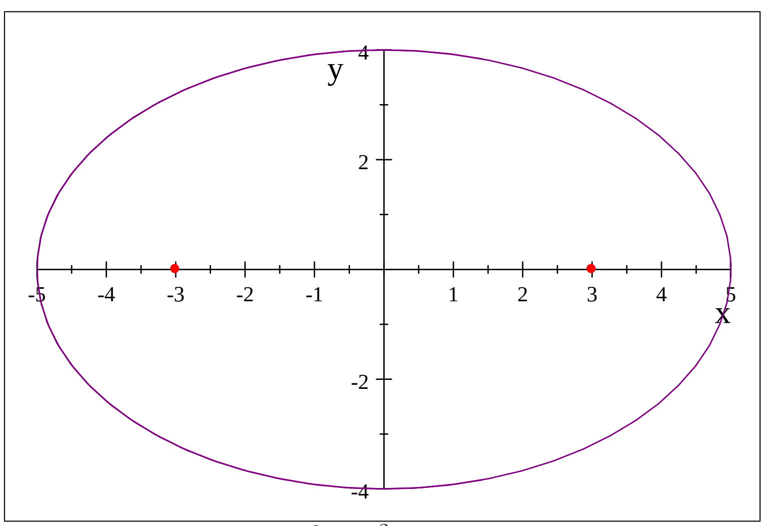
Transponiendo y reduciendo términos

$$16x^2+25y^2=400$$

Dividiendo toda la ecuación por 400

$$\frac{16x^2+25y^2}{400}=\frac{400}{400}\rightarrow\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$$

Esta ecuación representa los puntos de la siguiente elipse (El eje mayor está sobre el eje OX)



$\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{16}=1$

Cuestión d) Dados los puntos $F(0,3)$ y F' $(0,-3)$. Determina el lugar geométrico de los puntos cuya suma de distancias a F y F' sea de 10 unidades

Nos están pidiendo los puntos $P(x,y)$ tales que $d(F,P)+d(F',P)=10$

$$\left\|\overrightarrow{FP}\right\| + \left\|\overrightarrow{F'P}\right\| = 10 \tag{b}$$

Como $\left[\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c}\overrightarrow{FP}=(x,y-3)\\ \overrightarrow{F'P}=(x,y+3)\end{array}\right\}\end{array}\right]$ entonces $\left[\begin{array}{c}\left\|\overrightarrow{FP}\right\| = \sqrt{x^2+(y-3)^2}\\ \left\|\overrightarrow{F'P}\right\| = \sqrt{x^2+(y+3)^2}\end{array}\right]$

Sustituyendo en (b); tendremos

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}+\sqrt{x^2+(y+3)^2}=10$$

Aislamos una raíz

$$\sqrt{x^2+(y-3)^2}=10-\sqrt{x^2+(y+3)^2}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros

$$x^2+(y-3)^2=100-20\sqrt{x^2+(y+3)^2}+x^2+(y+3)^2$$

Desarrollando, transponiendo y eliminando términos semejantes:

$$20\sqrt{x^2+(y+3)^2}=100+12y$$

Dividimos por 4

$$5\sqrt{x^2+(y+3)^2}=25+3y$$

Elevando al cuadrado los dos términos

$$25\left(x^2+(y+3)^2\right)=625+150y+9y^2$$

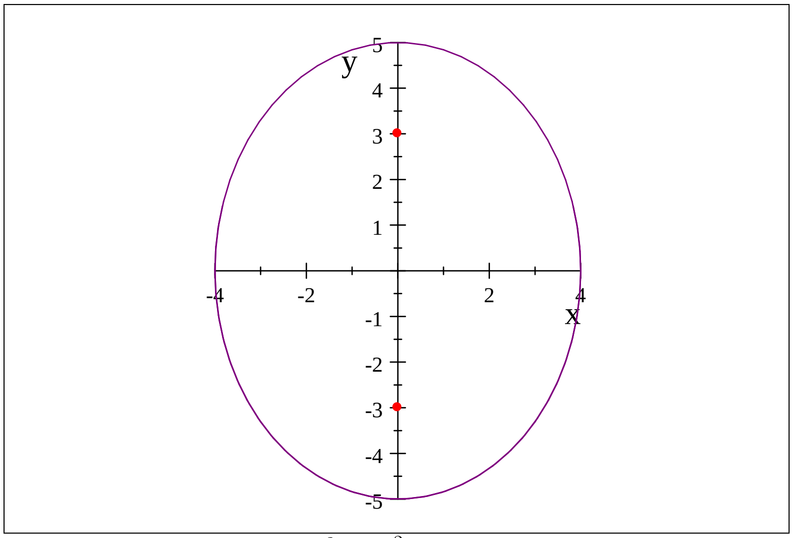
Transponiendo y reduciendo términos

$$25x^2+16y^2=400$$

Dividiendo toda la ecuación por 400

$$\frac{25x^2+16y^2}{400}=\frac{400}{400}\rightarrow\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{25}=1$$

Esta ecuación representa los puntos de la siguiente elipse (El eje mayor está sobre el eje OY)



$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{25} = 1$

Cuestión e) Dados los puntos $F(4,0)$ y $F'\ (-4,0)$. Determina el lugar geométrico de los puntos tal que el valor absoluto de la diferencia de distancias a F y F' sea de 6 unidades

Nos están pidiendo los puntos $P(x,y)$ tales que $|d(F,P) - d(F',P)| = 6$

$$\left\|\overrightarrow{FP}\right\| - \left\|\overrightarrow{F'P}\right\| = 6 \qquad \text{(c)}$$

Como $\left[\begin{array}{c} \left.\begin{array}{c}\overrightarrow{FP} = (x-4,y) \\ \overrightarrow{F'P} = (x+4,y)\end{array}\right\}\end{array}\right]$ entonces $\left[\begin{array}{c} \left\|\overrightarrow{FP}\right\| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\ \left\|\overrightarrow{F'P}\right\| = \sqrt{(x+4)^2 + y^2}\end{array}\right]$

Sustituyendo en (c); tendremos

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} - \sqrt{(x+4)^2 + y^2} = 6$$

Aislamos una raíz

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = 6 - \sqrt{(x+4)^2 + y^2}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros

$$(x-4)^2 + y^2 = 36 - 12\sqrt{(x+4)^2 + y^2} + (x+4)^2 + y^2$$

Desarrollando, transponiendo y eliminando términos semejantes:

$$12\sqrt{(x+4)^2+y^2} = 36+16x$$

Dividimos por 4

$$3\sqrt{(x+4)^2+y^2} = 9+4x$$

Elevando al cuadrado los dos términos

$$9\left((x+4)^2+y^2\right) = 81+72x+16x^2$$

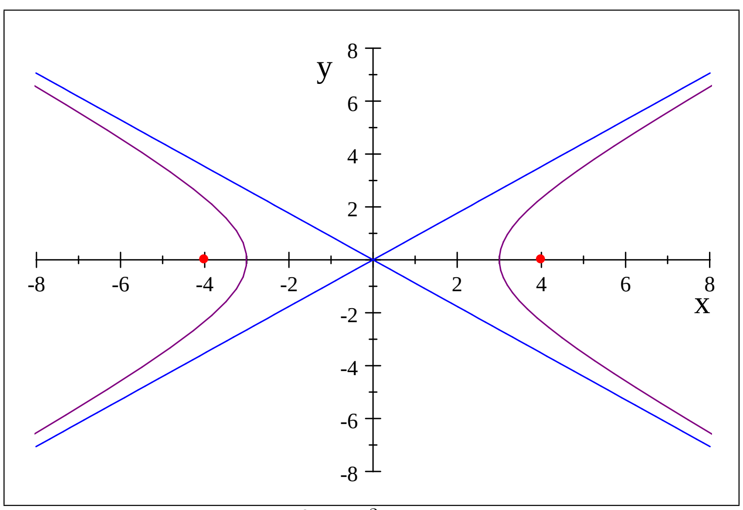
Transponiendo y reduciendo términos

$$-7x^2+9y^2+63=0 \rightarrow 7x^2-9y^2=63$$

Dividiendo toda la ecuación por 63

$$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$$

Esta ecuación representa los puntos de la siguiente hipérbola (El eje real está sobre el eje OX)



$\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{7}=1$

Esta curva tiene dos asintotas oblícuas de ecuaciones $\begin{bmatrix} y=\frac{\sqrt{7}}{3}x \\ y=-\frac{\sqrt{7}}{3}x \end{bmatrix}$. En la gráfica, las asíntotas oblícuas de la hipérbola están representadas de azul

Cuestión e) Dados los puntos $F(0,4)$ y F' $(0,-4)$. Determina el lugar geométrico de los puntos tal que el valor absoluto de la diferencia de distancias a F y F' sea de 6 unidades

Nos están pidiendo los puntos $P(x,y)$ tales que $|d(F,P)-d(F',P)|=6$

$$\left\|\overrightarrow{FP}\right\| - \left\|\overrightarrow{F'P}\right\| = 6 \tag{d}$$

Como $\left[\begin{array}{c} \overrightarrow{FP}=(x,y-4) \\ \overrightarrow{F'P}=(x,y+4) \end{array}\right\}\Bigg]$ entonces $\left[\begin{array}{c} \left\|\overrightarrow{FP}\right\| = \sqrt{x^2+(y-4)^2} \\ \left\|\overrightarrow{F'P}\right\| = \sqrt{x^2+(y+4)^2} \end{array}\right]$

Sustituyendo en (d); tendremos

$$\sqrt{x^2+(y-4)^2} - \sqrt{x^2+(y+4)^2} = 6$$

Aislamos una raíz

$$\sqrt{x^2+(y-4)^2} = 6 - \sqrt{x^2+(y+4)^2}$$

Elevamos al cuadrado los dos miembros

$$x^2+(y-4)^2 = 36 - 12\sqrt{x^2+(y+4)^2} + x^2 + (y+4)^2$$

Desarrollando, transponiendo y eliminando términos semejantes:

$$12\sqrt{x^2+(y+4)^2} = 36+16y$$

Dividimos por 4

$$3\sqrt{x^2+(y+4)^2} = 9+4y$$

Elevando al cuadrado los dos términos

$$9\left(x^2+(y+4)^2\right) = 81+72y+16y^2$$

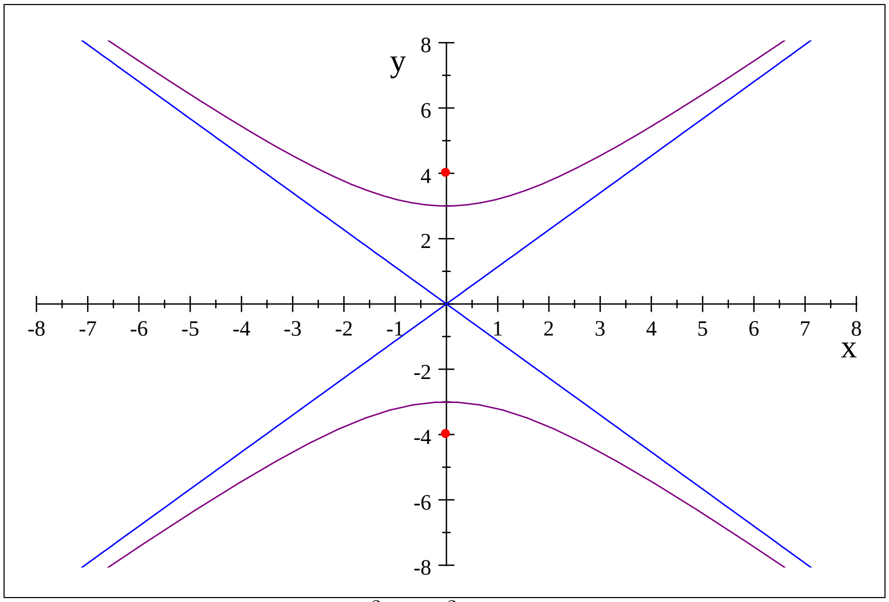
Transponiendo y reduciendo términos

$$9x^2-7y^2+63=0 \rightarrow 7y^2-9x^2=63$$

Dividiendo toda la ecuación por 63

$$\frac{y^2}{9}-\frac{x^2}{7}=1$$

Esta ecuación representa los puntos de la siguiente hipérbola (El eje real está sobre el eje OY)



$$\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{7} = 1$$

Esta curva tiene dos asintotas oblícuas de ecuaciones $\left[\begin{array}{c} y = \frac{3}{\sqrt{7}}x \\ y = -\frac{3}{\sqrt{7}}x \end{array} \right]$. En la gráfica las asíntotas oblícuas de la hipérbola están representadas de azul

Cuestión f) Dado el punto $F(4,0)$ y la recta de ecuación $r \equiv x = -4$. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto F y de la recta r

Nos están pidiendo los puntos $P(x,y)$ tales que $d(P,F) = d(P,r)$

Como $\left[\begin{array}{c} \overrightarrow{FP} = (x-4, y) \\ d(P,r) = |x+4| \end{array} \right\}\left.\right] \rightarrow \left[\begin{array}{c} \left\|\overrightarrow{FP}\right\| = \sqrt{(x-4)^2 + y^2} \\ d(P,r) = |x+4| \end{array} \right\}\left.\right]$

Entonces:

$$\sqrt{(x-4)^2 + y^2} = |x+4|$$

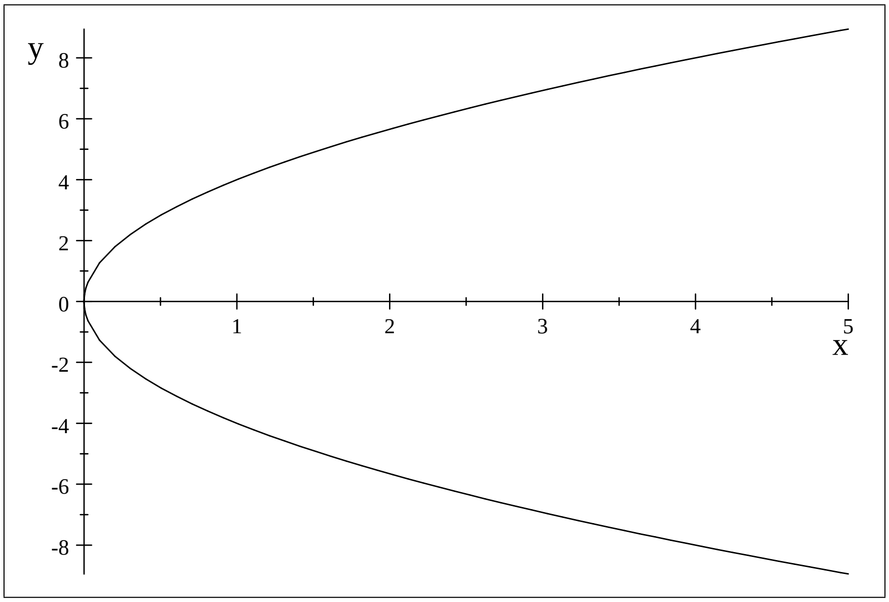
Elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación:

$$(x-4)^2 + y^2 = (x+4)^2$$

Desarrollando y aislando y^2 obtendremos:

$$y^2 = 16x$$

Esta ecuación representa los puntos de la siguiente parábola



Cuestión g) Dado el punto $F(0,9)$ y la recta de ecuación $r \equiv y = 3$. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto F y de la recta r

Nos están pidiendo los puntos $P(x,y)$ tales que $d(P,F) = d(P,r)$

Como $\left[\left. \begin{array}{c} \overrightarrow{FP} = (x, y-9) \\ d(P,r) = |y-3| \end{array} \right\} \right] \rightarrow \left[\left. \begin{array}{c} \left\| \overrightarrow{FP} \right\| = \sqrt{x^2 + (y-9)^2} \\ d(P,r) = |y-3| \end{array} \right\} \right]$

Entonces:

$$\sqrt{x^2 + (y-9)^2} = |y-3|$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación:

$$x^2 + (y-9)^2 = (y-3)^2$$

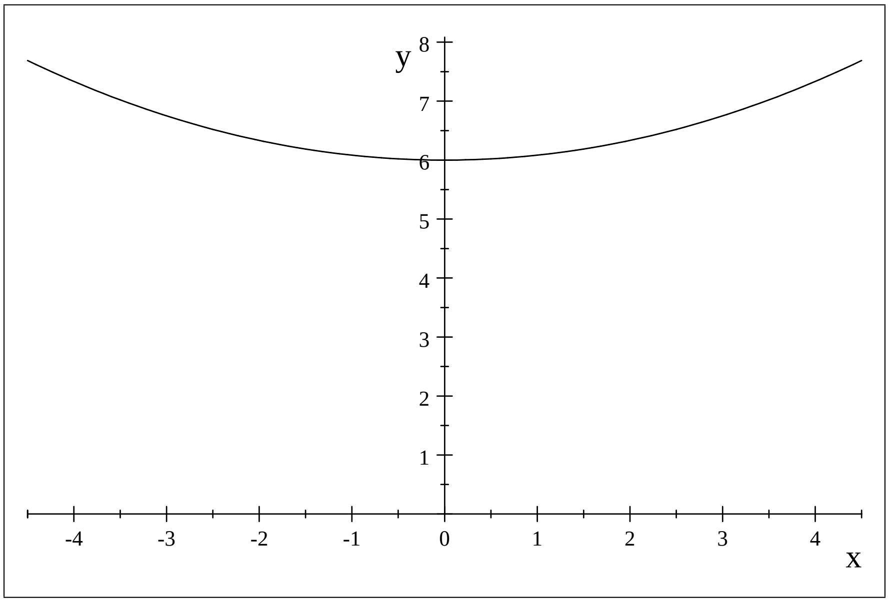
Desarrollando obtendremos:

$$x^2 + y^2 - 18y + 81 = y^2 - 6y + 9$$

Aislando la incógnita y

$$y = \frac{x^2}{12} + 6$$

Esta ecuación representa los puntos de la siguiente parábola (su vértice es el punto $V(0,6)$):



4. Distancia de un punto a una recta

Dado un punto P y una recta r llamaremos distancia de P a r al siguiente número real:

$$d(P,r) = d(P,H) = \left\| \overrightarrow{PH} \right\|$$

donde H es la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r

Ejemplo a) Determina la distancia del punto $P(1,-1)$ a la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 2-\alpha \\ y = 3+4\alpha \end{array} \right.$

En primer lugar calcularemos el punto H proyección ortogonal de P sobre r

Primer procedimiento .

Recuerda que H es un punto de r concreto (el vector $\overrightarrow{PH}$ ha de ser ortogonal al vector director de r)

$$\left\{ \begin{array}{c} H \in r \\ y \\ \overrightarrow{PH} \text{ es perpendicular a } r \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} H \in r \\ y \\ \overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{v_r} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} H = (2-\alpha, 3+4\alpha) \\ y \\ \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \end{array} \right\}$$

Fíjate que $\overrightarrow{PH} = (2-\alpha-1, 3+4\alpha-(-1)) = (1-\alpha, 4\alpha+4)$ y que $\overrightarrow{v_r} = (-1,4)$
Como $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Leftrightarrow (1-\alpha, 4\alpha+4) \cdot (-1,4) = 0 \Leftrightarrow -1+\alpha+16\alpha+16 = 0 \Leftrightarrow \alpha = -\frac{15}{17}$

Sustituyendo el valor de α en las ecs. paramétricas de r tendremos que:

$$H = \left(2 - \left(-\frac{15}{17}\right), 3 + 4\left(-\frac{15}{17}\right)\right) = \left(\frac{49}{17}, -\frac{9}{17}\right)$$

Segundo procedimiento

1^o Calcularemos la recta s que pase por $P(1,-1)$ y sea perpendicular a $r \left\{ \begin{array}{c} x = 2 - \alpha \\ y = 3 + 4\alpha \end{array} \right.$

Como el vector director de r es $v_r = (-1, 4)$ $\rightarrow$su pendiente vale $m_r = -4$
La pendiente de cualquier recta perpendicular a r valdrá $\frac{1}{4}$
Como s es $\perp$ a r y $P \in s \Leftrightarrow s \equiv \left\{ \begin{array}{c} m_s = \frac{1}{4} \\ P(1,-1) \in s. \end{array} \right.$
Luego su ec. explícita es

$$y + 1 = \frac{1}{4}(x-1) \rightarrow y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4}$$

2^o Resolveremos el sistema formado por ambas ecuaciones ($H = r \cap s$)

$$H = r \cap s \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 2 - \alpha \\ y = 3 + 4\alpha \\ y = \frac{1}{4}x - \frac{5}{4} \end{array} \right.$$

Si los valores de x e y ,de las dos primeras ecuaciones, los sustituimos en la 3^a ec obtenemos la siguiente ecuación:

$$3 + 4\alpha = \frac{1}{4}(2 - \alpha) - \frac{5}{4}$$

Resoviendo esta ecuación; tendremos:

$$\alpha = -\frac{15}{17}$$

Con lo que

$$H = \left(2 - \left(-\frac{15}{17}\right), 3 + 4\left(-\frac{15}{17}\right)\right) = \left(\frac{49}{17}, -\frac{9}{17}\right)$$

Determinadas las coordenadas del punto H .Ya podemos calcular la distancia de P a r

Así pues; el vector $\overrightarrow{PH} = \left(\frac{49}{17} - 1, -\frac{9}{17} + 1\right) = \left(\frac{32}{17}, \frac{8}{17}\right)$. con lo que:

$$d(P,r) = d(P,H) = \left\| \overrightarrow{PH} \right\| = \sqrt{\left(\frac{32}{17}\right)^2 + \left(\frac{8}{17}\right)^2} = \frac{8}{17}\sqrt{17}$$

Ejemplo b) Dada la recta $r \equiv y = \frac{2}{3}x - 5$ y el punto $P(3, -5)$.
a) Distancia de P a la recta r

Calculemos la proyección ortogonal de P sobre r.Llamemos H a dicho punto

Primer procedimiento

Por ser H la proyección ortogonal de P sobre r; entonces se verifica

$$\left\{ \begin{array}{c} H \in r \\ y \\ \overrightarrow{PH} \text{ es perpendicular a } r \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} H \in r \\ y \\ \overrightarrow{PH} \perp \overrightarrow{v_r} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{c} H = (x, \frac{2}{3}x - 5) \\ y \\ \overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \end{array} \right\}$$

Fíjate que $\overrightarrow{PH} = (x - 3, \frac{2}{3}x - 5 - (-5)) = \left(x - 3, \frac{2}{3}x\right)$ y que $\overrightarrow{v_r} = (3, 2)$
Como $\overrightarrow{PH} \cdot \overrightarrow{v_r} = 0 \Leftrightarrow \left(x - 3, \frac{2}{3}x\right)(3, 2) = 0 \Leftrightarrow 3(x - 3) + 2\left(\frac{2}{3}x\right) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{27}{13}$
Sustituyendo el valor de x en las ecs. explícitas de r tendremos que:

$$H = \left(\frac{27}{13}, \frac{2}{3}\left(\frac{27}{13}\right) - 5\right) = \left(\frac{27}{13}, -\frac{47}{13}\right)$$

Segundo procedimiento

1. Calcularemos la recta s que pase por $P(3, -5)$ y sea perpendicular a r$\equiv y = \frac{2}{3}x - 5$

La pendiente de r vale $m_r = \frac{2}{3}$
La pendiente de cualquier recta perpendicular a r valdrá $-\frac{3}{2}$
Como s es $\perp$ a r y $P \in s \Leftrightarrow s \equiv \left\{ \begin{array}{c} m_s = -\frac{3}{2} \\ P(3, -5) \in s. \end{array} \right.$
Luego su ec. explícita es

$$y + 5 = -\frac{3}{2}(x - 3) \rightarrow y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

2. Resolveremos el sistema formado por ambas ecuaciones ($H = r \cap s$)

$H = r \cap s \equiv \left\{ \begin{array}{c} y = \frac{2}{3}x - 5 \\ y = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2} \end{array} \right.$
Resolviéndolo por igualación, obtendremos la ecuación

$$\frac{2}{3}x - 5 = -\frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

Cuya solución es:

$$x = \frac{27}{13}$$

Con lo que

$$H = \left(\frac{27}{13}, \frac{2}{3}\left(\frac{27}{13}\right) - 5\right) = \left(\frac{27}{13}, -\frac{47}{13}\right)$$

Determinadas las coordenadas del punto H .Ya podemos calcular la distancia de P a r

Así pues; el vector $\overrightarrow{PH} = \left(\frac{27}{13} - 3, -\frac{47}{13} + 5\right) = \left(-\frac{12}{13}, \frac{18}{13}\right)$. con lo que:

$$d(P,r) = d(P,H) = \left\|\overrightarrow{PH}\right\| = \sqrt{\left(-\frac{12}{13}\right)^2 + \left(\frac{18}{13}\right)^2} = \frac{6}{13}\sqrt{13}$$

Para calcular la distancia de un punto a una recta siempre realizamos los mismos pasos. Tiene que existir alguna fórmula sencilla que nos permita acortar todos estos cálculos tan laboriosos.

4.1. 1ª Fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta. Sea P un punto cualesquiera del plano y sea r una recta conocida de éste. La distancia del punto P a la recta r se puede determinar mediante la siguiente fórmula:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{w_r} \cdot \overrightarrow{A_rP}\right|}{\|\overrightarrow{w_r}\|}$$

donde A_r es un punto cualesquiera de la recta r y $\overrightarrow{w_r}$ es el vector ortogonal a la recta r

Demostración:

Antes de empezar la demostración, vamos a recordar un concepto relacionado con la proyección de un vector sobre otro

Recordatorio

Sabemos que

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \|\overrightarrow{u}\| \, \|\overrightarrow{v}\| \cos\alpha \text{ siendo } \alpha = ang(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$$

Distinguiendo si α es agudo u obtuso, tendremos :

$$\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v} = \begin{cases} \|\overrightarrow{u}\| \left\|\overrightarrow{\text{Proy}_{\overrightarrow{u}}\,(\overrightarrow{v})}\right\| & \text{si } \alpha \text{ es agudo} \\ -\|\overrightarrow{u}\| \left\|\overrightarrow{\text{Proy}_{\overrightarrow{u}}\,(\overrightarrow{v})}\right\| & \text{si } \alpha \text{ es obtuso} \end{cases}$$

Si tomamos valor absoluto tendremos:

$$|\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{v}| = \|\overrightarrow{u}\| \left\| \overrightarrow{\text{Proy}_{\overrightarrow{u}} (\overrightarrow{v})} \right\|$$

El valor absoluto del producto escalar de dos vectores coincide con el módulo de un vector por el módulo del vector proyección del segundo sobre el primero.

Demostración:

Si de una recta r conocemos A_r un punto cualesquiera de ella r y su vector ortogonal $\overrightarrow{w_r}$. Al considerar el siguiente número real $\left|\overrightarrow{w_r} \cdot \overrightarrow{A_rP}\right|$ donde P es un punto conocido, tendremos:

$$\left|\overrightarrow{w_r} \cdot \overrightarrow{A_rP}\right| = \|\overrightarrow{w_r}\| \left\| \overrightarrow{\text{Proy}_{\overrightarrow{w_r}} \left(\overrightarrow{A_rP}\right)} \right\|$$

Como $\left\| \overrightarrow{\text{Proy}_{\overrightarrow{w_r}} \left(\overrightarrow{A_rP}\right)} \right\| = \left\|\overrightarrow{PH}\right\|$ donde H es la proyección ortogonal de P sobre r; entonces:

$$\left|\overrightarrow{w_r} \cdot \overrightarrow{A_rP}\right| = \|\overrightarrow{w_r}\| \left\|\overrightarrow{PH}\right\|$$

Aislando $\left\|\overrightarrow{PH}\right\|$

$$\left\|\overrightarrow{PH}\right\| = \frac{\left|\overrightarrow{w_r} \cdot \overrightarrow{A_rP}\right|}{\|\overrightarrow{w_r}\|}$$

Como sabemos $d(P,r) = d(P,H) = \left\|\overrightarrow{PH}\right\|$; entonces podemos concluir finalmente que:

$$d(P,r) = \frac{\left|\overrightarrow{w_r} \cdot \overrightarrow{A_rP}\right|}{\|\overrightarrow{w_r}\|}$$

Resolvamos los ejemplos anteriores con esta fórmula

Ejemplo a) Determina la distancia del punto $P(1,-1)$ a la recta $r \equiv \begin{cases} x = 2-\alpha \\ y = 3+4\alpha \end{cases}$

Necesito de la recta r los siguientes datos "un punto y su vector ortogonal

Como $r \equiv y = \begin{cases} x = 2-\alpha \\ y = 3+4\alpha \end{cases}$

$$r \equiv \begin{cases} A_r(2,3) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1,4) \text{ v.director} \end{cases} \to r \equiv \begin{cases} A_r(2,3) \\ \overrightarrow{w_r} = (4,1) \text{ v.ortogonal} \end{cases}$$

Calculemos $\overrightarrow{w_r} \cdot \overrightarrow{A_rP}$

$$\left[\begin{array}{c}\overrightarrow{A_rP}=(1-2,-1-3)=(-1,-4)\\ \overrightarrow{w_r}=(4,1)\end{array}\right]\rightarrow\overrightarrow{w_r}\cdot\overrightarrow{A_rP}=-1{\cdot}4-4{\cdot}1=-8$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{w_r}\cdot\overrightarrow{A_rP}\right|}{\|\overrightarrow{w_r}\|}=\frac{|-8|}{\sqrt{1^2+4^2}}=\frac{8}{\sqrt{17}}=\frac{8}{17}\sqrt{17}$$

Ejemplo b) Dada la recta $r\equiv y=\frac{2}{3}x-5$ y el punto $P(3,-5)$.

a) Calcula la distancia de P a la recta r

Solución

Necesito de la recta r los siguientes datos "un punto y su vector ortogonal

Como $r\equiv y=\frac{2}{3}x-5\rightarrow r\equiv\left\{\begin{array}{c}A_r(0,-5)\\ m_r=\frac{2}{3}\end{array}\right.\rightarrow r\equiv\left\{\begin{array}{c}A_r(0,-5)\\ \overrightarrow{v_r}=(3,2)\text{ v.director}\\ \overrightarrow{w_r}=(-2,3)\text{ v.ortogonal}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{c}\overrightarrow{A_rP}=(3-0,-5-(-5))=(3,0)\\ \overrightarrow{w_r}=(-2,3)\end{array}\right]\rightarrow\overrightarrow{w_r}\cdot\overrightarrow{A_rP}=3{\cdot}(-2)+0{\cdot}3=-6$$

$$d(P,r)=\frac{\left|\overrightarrow{w_r}\cdot\overrightarrow{A_rP}\right|}{\|\overrightarrow{w_r}\|}=\frac{|-6|}{\sqrt{(-2)^2+3^2}}=\frac{6}{\sqrt{13}}=\frac{6}{13}\sqrt{13}$$

4.2. 2^a Fórmula para calcular la distancia de un punto a una recta.

$$\text{Sean}\left[\begin{array}{c}P(x_0,y_0)\in\mathbb{R}^2\\ r\equiv Ax+By+C=0\text{ una recta del plano}\end{array}\right]$$

La distancia del punto P a la recta r se determina con la fórmula:

$$d(P,r)=\frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Demostración:

Sabemos por la fórmula anterior que $d(P,r)=\dfrac{\left|\overrightarrow{w_r}\cdot\overrightarrow{A_rP}\right|}{\|\overrightarrow{w_r}\|}$ donde A_r es un punto cualesquiera de la recta r y $\overrightarrow{w_r}$ es el vector ortogonal a dicha recta

Necesito de la recta r los siguientes datos "un punto y su vector ortogonal

Como $r\equiv Ax+By+C=0\rightarrow r\equiv\left\{\begin{array}{c}A_r(a,b)\in r\\ \overrightarrow{v_r}=(-B,A)\text{ v.director}\end{array}\right.\rightarrow r\equiv$ $\left\{\begin{array}{c}A_r(a,b)\\ \overrightarrow{w_r}=(A,B)\text{ v.ortogonal}\end{array}\right.$

$$\left[\begin{array}{c} \overrightarrow{A_rP} = (x_0 - a, y_0 - b) \\ \overrightarrow{w_r} = (A, B) \end{array} \right]$$

Calculemos$\overrightarrow{w_r} \cdot \overrightarrow{A_rP}$

$$\overrightarrow{w_r} \cdot \overrightarrow{A_rP} = A\cdot(x_0 - a) + B\cdot(y_0 - b) = Ax_0 + By_0 - Aa - Bb$$

Ahora bien; al ser $A_r = (a, b)$ un punto de r .Entonces; sus coordenadas han de verificar su ecuación

$$Aa + Bb + C = 0 \rightarrow C = -Aa - Bb$$

Entonces; la expresión de $\overrightarrow{w_r} \cdot \overrightarrow{A_rP}$ nos quedará así:

$$\overrightarrow{w_r} \cdot \overrightarrow{A_rP} = Ax_0 + By_0 - Aa - Bb = Ax_0 + By_0 + C$$

Lo que nos permite afirmar que:

$$d(P, r) = \frac{\left|\overrightarrow{w_r} \cdot \overrightarrow{A_rP}\right|}{\|\overrightarrow{w_r}\|} = \frac{|Ax_0 + By_0 + C|}{\sqrt{A^2 + B^2}} \qquad \text{(c.q.d)}$$

Volvamos a resolver los ejemplos anteriores con esta última expresión

Ejemplo a) Determina la distancia del punto $P(1, -1)$ a la recta $r \equiv \left\{ \begin{array}{c} x = 2 - \alpha \\ y = 3 + 4\alpha \end{array} \right.$

Necesito la ecuación cartesiana de la recta r (me interesa conocer su vector ortogonal y un punto para obtenerla directamente).

Fíjate que

$r \equiv \left\{ \begin{array}{c} A_r(2, 3) \\ \overrightarrow{v_r} = (-1, 4) \text{ v.director} \end{array} \right. \rightarrow r \equiv \left\{ \begin{array}{c} A_r(2, 3) \\ \overrightarrow{w_r} = (4, 1) \text{ v.ortogonal} \end{array} \right.$

La ecuación cartesiana de r es

$$4(x - 2) + 1(y - 3) = 0 \rightarrow 4x + y - 11 = 0$$

Como $\left[\begin{array}{c} P(1, -1) \\ r \equiv 4x + y - 11 = 0 \end{array} \right]$ entonces:

$$d(P, r) = \frac{|4\cdot 1 + (-1) - 11|}{\sqrt{4^2 + 1^2}} = \frac{8}{\sqrt{17}} = \frac{8}{17}\sqrt{17}$$

Ejemplo b) Determina la distancia del punto del punto $P(3, -5)$ a la recta $r \equiv y = \frac{2}{3}x - 5$

Necesito la ecuación cartesiana de la recta r
Fíjate que

$$y = \frac{2}{3}x - 5 \rightarrow 2x - 3y - 15 = 0$$

Como $\left[\begin{array}{c} P(3,-5) \\ r \equiv 2x - 3y - 15 \end{array} \right]$ entonces:

$$d(P,r) = \frac{|2\cdot(3) - 3(-5) - 15|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{6}{\sqrt{13}} = \frac{6}{13}\sqrt{13}$$

Nota: Después de haber determinado la distancia de un punto P a una recta r de muchas manera, te recomiendo que utilices este último por su brevedad y sencillez (Seguro que no me haces caso)

Cuestión h) Dado el punto $F(1,2)$ y la recta de ecuación $r \equiv x - y + 2 = 0$. Determina el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan del punto F y de la recta r

Nos están pidiendo los puntos $P(x,y)$ tales que $d(P,F) = d(P,r)$

Como $\left[\left. \begin{array}{c} \overrightarrow{FP} = (x-1, y-2) \\ d(P,r) = \dfrac{|x-y+2|}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \right] \rightarrow \left[\left. \begin{array}{c} \left\|\overrightarrow{FP}\right\| = \sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} \\ d(P,r) = \dfrac{|x-y+2|}{\sqrt{2}} \end{array} \right\} \right]$

Entonces:

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = \frac{|x-y+2|}{\sqrt{2}}$$

Elevando al cuadrado los dos miembros de la ecuación:

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 = \left(\frac{x-y+2}{\sqrt{2}}\right)^2$$

Desarrollando obtendremos:

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y + 5 = \frac{1}{2}x^2 - xy + 2x + \frac{1}{2}y^2 - 2y + 2$$

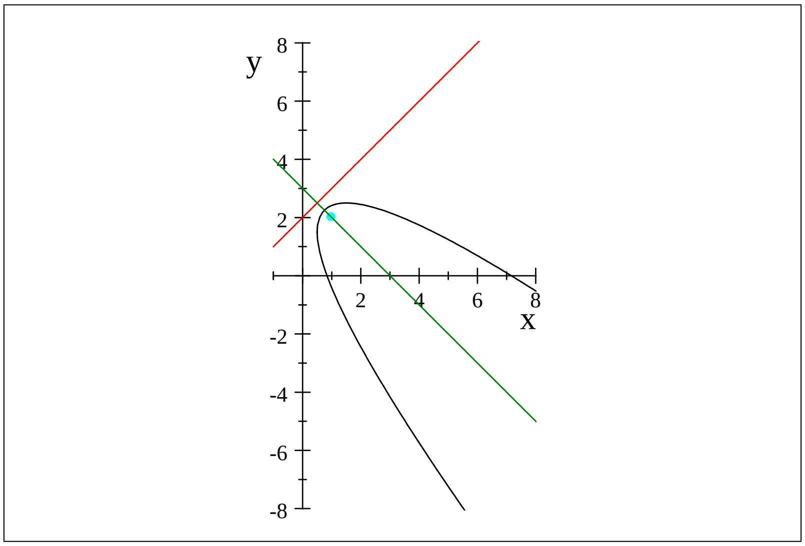
Transponiendo términos y reduciendo

$$\frac{1}{2}x^2 + xy - 4x + \frac{1}{2}y^2 - 2y + 3 = 0$$

Multiplicando por 2

$$x^2 + y^2 + 2xy - 8x - 4y + 6 = 0$$

En cursos posteriores podrás dibujar esta parábola



5. Distancia del origen de coordenadas a una recta

Dada la recta $r \equiv Ax + By + D = 0$. La distancia del origen de coordenadas, O, a dicha recta r, viene dada por la expresión:

$$d(O, r) = \frac{|D|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Ejercicio a) Dada la recta $r \equiv 2x - 3y - 4 = 0$ calcula la distancia del origen a dicha recta

Utilizando la relación anterior

$$d(O, r) = \frac{|-4|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2}} = \frac{4}{\sqrt{13}} = \frac{4}{13}\sqrt{13}$$

Calculemos dicha distancia de otra manera.

Como $d(O, r) = d(O, H) = \left\| \overrightarrow{OH} \right\|$Siendo H la proyección ortogonal del ,origen, O, sobre dicha recta r. Tendremos que calcular dicho punto H

Para lo cual; realizaremos los siguientes pasos:

1^o Calculamos la recta, s, perpendicular a r, que pase por el origen de coordenadas

Como el vector ortogonal de r es $\overrightarrow{w_r} = (2, -3)$;entonces, la ecuación cartesiana de todas las rectas ortogonales a r es de la forma:

$$3x + 2y + D = 0$$

Como ha de pasar por el origen $O(0, 0) \to s \equiv 3x + 2y = O$

2^o La proyección ortogonal del origen sobre la recta r, se determina calculando el punto de intersección de la recta r con la recta del apartado anterior s.

$$H = r \cap s \left\{ \begin{array}{c} 2x - 3y - 4 = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{array} \right. \rightarrow H\left(\frac{8}{13}, -\frac{12}{13}\right)$$

3^o Como $d(O,r) = d(O,H) = \left\| \overrightarrow{OH} \right\|$ siendo $\overrightarrow{OH} = \left(\frac{8}{13}, -\frac{12}{13}\right)$
Entonces:

$$d(O,r) = \sqrt{\frac{64}{13^2} + \frac{144}{13^2}} = \frac{4}{13}\sqrt{13}$$

6. Distancia entre dos rectas paralelas

Dadas las rectas paralelas $r \equiv Ax+By+D=0$ y $r' \equiv Ax+By+D'=0$.La distancia entre estas dos rectas viene determinada por la expresión:

$$d(r,r') = \frac{|D - D'|}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Para calcular esta distancia sin la relación anterior; podemos utilizar cualquiera de las siguientes relaciones:

$$\begin{array}{rcl} d(r,r') & = & d(A_r, r') \text{ donde } A_r \in r \\ & & \text{ó} \\ d(r,r') & = & d(A_{r'}, r) \text{ donde } A_{r'} \in r' \end{array}$$

Ejemplo a) Dadas las rectas $r \equiv 3x - y + 4 = 0$ y $r' \equiv -6x + 2y + 4 = 0$ calcular la distancia entre estas dos rectas

Como en las ecuaciones de ambas rectas los coeficientes de las incógnitas x e y no coinciden; lo primero que haremos, será transformar la segunda ecuación para conseguir que estos coeficientes coincidan y poder aplicar la fórmula anterior

Como $\left[\begin{array}{c} r \equiv 3x - y + 4 = 0 \\ r' \equiv -6x + 2y + 4 = 0 \end{array} \right] \rightarrow \left[\begin{array}{c} r \equiv 3x - y + 4 = 0 \\ r' \equiv 3x - y - 2 = 0 \end{array} \right]$
De donde:

$$d(r,r') = \frac{|4 - (-2)|}{\sqrt{3^2 + (-1)^2}} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$$

Segundo procedimiento
Obtenemos un punto de r
Como $\left. \begin{array}{c} r \equiv 3x - y + 4 = 0 \\ \text{Si } x = 0 \end{array} \right\} \rightarrow y = 4$
Asi pues; ya conocemos un punto $A_r(0,4)$. $\in r$

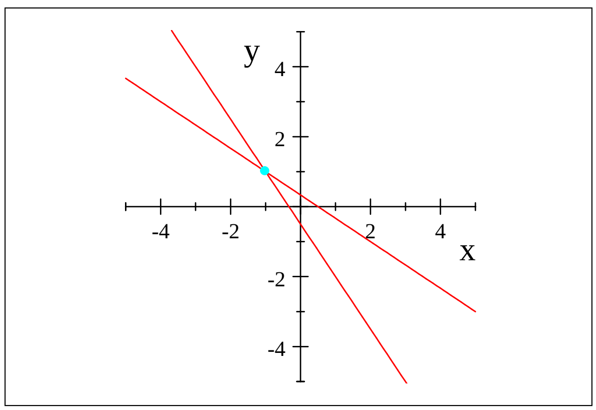
Y como

$$d(r,r') = d(A_r(0,4), r' \equiv -6x+2y+4=0) = \frac{|8+4|}{\sqrt{(-6)^2+2^2}} = \frac{3}{5}\sqrt{10}$$

donde $A_r \in r$

6.1. Bisectrices determinadas por dos rectas secantes en un punto. Dadas dos rectas r y s secantes en un punto P siempre podemos trazar por P la bisectriz interior b_{int} y su bisectriz exterior b_{ext}. Ambas rectas (bisectriz interior y bisectriz exterior) tienen la siguiente propiedad: Son los puntos del plano que equidistan de las rectas r y s

Ejercicio a) Determina las ecuaciones cartesianas de las bisectrices interior y exterior de las rectas $r \equiv 3x+2y+1=0$ y $s \equiv 2x+3y-1=0$



Observaréis que ambas rectas son secantes en $P(-1,1)$ (lo podéis determinar resolviendo el sistema formado por las ecuaciones de r y de s

Los puntos de ambas bisectrices, son los puntos del plano que equidistan de las rectas r y s.

Según lo anterior, si $X(x,y)$ es un punto génerico de la bisectriz siempre se verifica que:

$$d(X, la\ recta\ r) = d(X, la\ recta\ s)$$

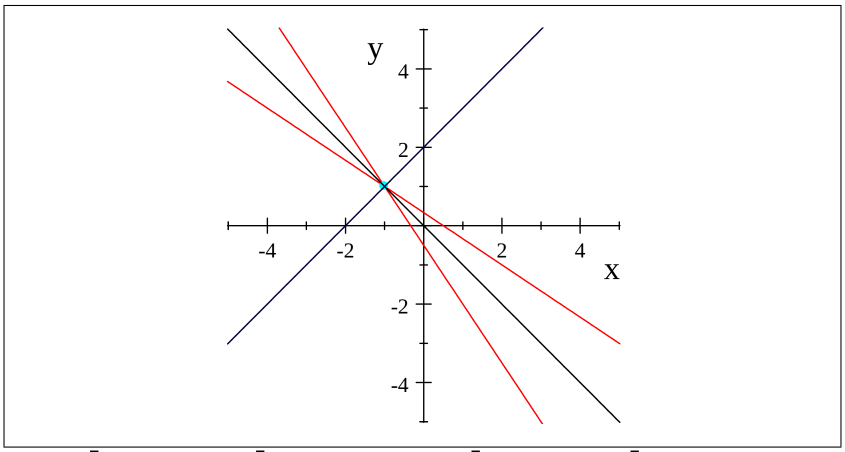
como $\left[\begin{array}{l} d(X, la\ recta\ r) = \frac{|3x+2y+1|}{\sqrt{3^2+2^2}} \\ d(X, la\ recta\ s) = \frac{|2x+3y-1|}{\sqrt{2^2+3^2}} \end{array}\right]$ entonces, por la condición gométrica anterior tendremos:

$$\frac{|3x+2y+1|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{|2x+3y-1|}{\sqrt{2^2+3^2}} \to |3x+2y+1| = |2x+3y-1|$$

De la ecuación anterior, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} 3x+2y+1=2x+3y-1 \\ 3x+2y+1=-2x-3y+1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} x-y=-2 \\ x+y=0 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} y=x+2 \\ y=-x \end{bmatrix}$$

Cada una de ellas representa una de las bisectrices.
Ahora bien ¿cuál es la interior y cuál la exterior?
Bastará con que las dibujes



La recta $\begin{bmatrix} y=x+2 \\ y=-x \end{bmatrix}$ es la bisectriz $\begin{bmatrix} exterior \\ interior \end{bmatrix}$ de las rectas r y s

Segundo procedimiento

Las bisectrices de dos rectas r y s ,secantes en $P=r\cap s$, son aquéllas que pasan las dos por P y sus vectores directores son $\dfrac{\overrightarrow{v_r}}{\|\overrightarrow{v_r}\|}+\dfrac{\overrightarrow{vs}}{\|\overrightarrow{v_s}\|}$ y $\dfrac{\overrightarrow{v_r}}{\|\overrightarrow{v_r}\|}-\dfrac{\overrightarrow{vs}}{\|\overrightarrow{v_s}\|}$ respectivamente.

Vamos a obtener la dos bisectrices: la interior ,b_{int}, y la exterior b_{ext}

Los vectores directores de r y s son $\overrightarrow{v_r}=(-2,3)$ y $\overrightarrow{v_s}=(-3,2)$ son respectivamente

Así pues:

$$r_1 \equiv \begin{cases} P(-1,1) \\ \dfrac{\overrightarrow{v_r}}{\|\overrightarrow{v_r}\|}+\dfrac{\overrightarrow{vs}}{\|\overrightarrow{v_s}\|}=\frac{1}{\sqrt{13}}(-2,3)+\frac{1}{\sqrt{13}}(-3,2)=\frac{1}{\sqrt{13}}(-5,5) \end{cases}$$

Para simplificar cálculos, podemos considerar como vector director de $r_1$el siguiente

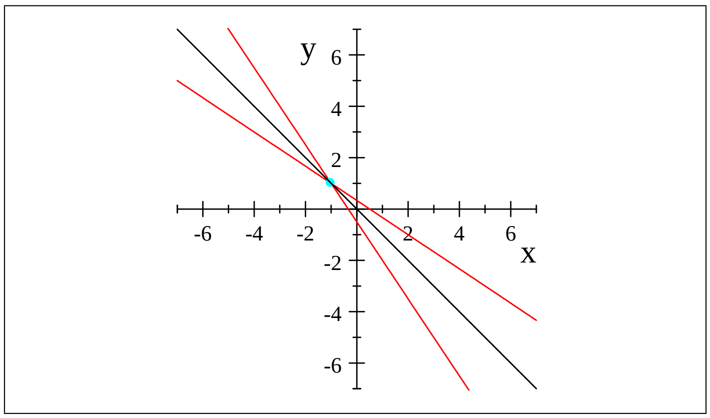
$$\overrightarrow{v_{r_1}}=\frac{\sqrt{13}}{5}\left(\frac{\overrightarrow{v_r}}{\|\overrightarrow{v_r}\|}+\frac{\overrightarrow{vs}}{\|\overrightarrow{v_s}\|}\right)=(-1,1)$$

$$r_1 \equiv \begin{cases} P(-1,1) \\ \overrightarrow{v_{r_1}}=(-1,1) \text{ vector director de } r_1 \end{cases} \rightarrow r_1 \equiv \begin{cases} P(-1,1) \\ \overrightarrow{w_{r_1}}=(1,1) \text{ vector ortogonal de } r_1 \end{cases}$$

Luego la ecuación cartesiana de r_1 es:

$$r_1 \equiv 1(x+1)+1(y-1)=0 \rightarrow r_1 \equiv x+y=0$$

La dibujamos para determinar si la recta r_1 es la bisectriz interior (b_{int}) o la bisectriz exterior(b_{ext})



La recta $y=-x$ es la bisectriz interior de las rectas r y s

Conclusión: La recta $y=-x$ es la bisectriz interior de las rectas r y s

Evidentemente; por eliminación, la bisectriz exterior de r y s será la recta determinada por el punto $P(-1,1)$ y por el vector director siguiente $\dfrac{\overrightarrow{v_r}}{\|\overrightarrow{v_r}\|}-\dfrac{\overrightarrow{vs}}{\|\overrightarrow{v_s}\|}$

$$b_{ext} \equiv \begin{cases} P(-1,1) \\ \dfrac{\overrightarrow{v_r}}{\|\overrightarrow{v_r}\|}-\dfrac{\overrightarrow{vs}}{\|\overrightarrow{v_s}\|}=\frac{1}{\sqrt{13}}(-2,3)-\frac{1}{\sqrt{13}}(-3,2)=\frac{1}{\sqrt{13}}(1,1) \end{cases}$$

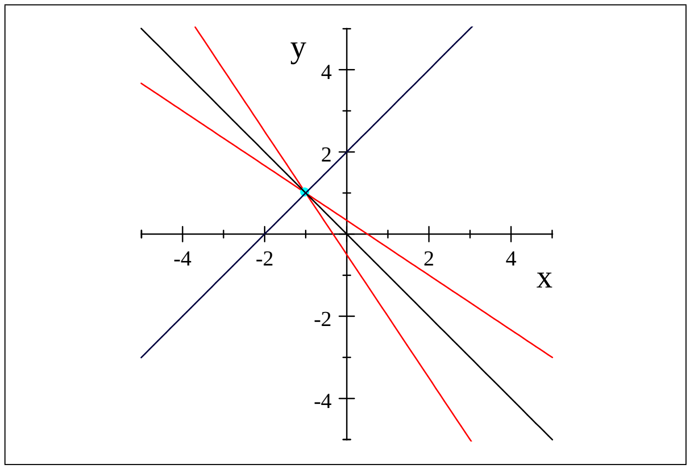
Para simplificar cálculos, podemos considerar como vector director de $r_1$el siguiente

$$\overrightarrow{v_{ext}}=\sqrt{13}\left(\frac{\overrightarrow{v_r}}{\|\overrightarrow{v_r}\|}-\frac{\overrightarrow{vs}}{\|\overrightarrow{v_s}\|}\right)=(1,1)$$

$$b_{ext} \equiv \begin{cases} P(-1,1) \\ \overrightarrow{v_{ext}}=(1,1) \text{ vector director de } b_{ext} \end{cases} \rightarrow b_{ext} \equiv \begin{cases} P(-1,1) \\ \overrightarrow{w_{ext}}=(-1,1) \text{ vector ortogonal de } b_{ext} \end{cases}$$

Luego la ecuación cartesiana de b_{ext} es:

$$b_{ext} \equiv -1(x+1)+1(y-1)=0 \rightarrow b_{ext} \equiv -x+y-2=0$$



La recta $y = x + 2$ es la bisectriz exterior de las rectas r y s

Conclusión: La recta $y = x+2$ es la bisectriz exterior de las rectas r y s

Nota: Este ejercicio no ha sido muy laborioso de calcular; ya que los vectores directores de las rectas dadas tenían el mismo módulo.

Veamos ahora uno mucho más complejo.

Ejercicio b) Determina la ecuación de las bisectrices asociadas a las rectas $y = \frac{x+4}{5}$ e $y = \frac{5x-2}{3}$

Las ecuaciones cartesianas de ambas rectas son $x-5y+4 = 0$ y $5x-3y-2 = 0$ y los módulos de sus vectores ortogonales son $\sqrt{1^2+(-5)^2} = \sqrt{26}$ y $\sqrt{5^2+(-3)^2} = \sqrt{34}$

Primer procedimiento

Los puntos de ambas bisectrices, son los puntos del plano que equidistan de las rectas r y s.

Según lo anterior, si $X(x, y)$ es un punto génerico de la bisectriz siempre se verifica que:

$$d(X, la\ recta\ r) = d(X, la\ recta\ s)$$

como $\left[\begin{array}{c} d(X, la\ recta\ r) = \frac{|x-5y+4|}{\sqrt{26}} \\ d(X, la\ recta\ s) = \frac{|5x-3y-2|}{\sqrt{34}} \end{array}\right]$ entonces, por la condición gométrica anterior tendremos:

$$\frac{|x-5y+4|}{\sqrt{26}} = \frac{|5x-3y-2|}{\sqrt{34}} \rightarrow \sqrt{17}\,|x-5y+4| = \sqrt{13}\,|5x-3y-2|$$

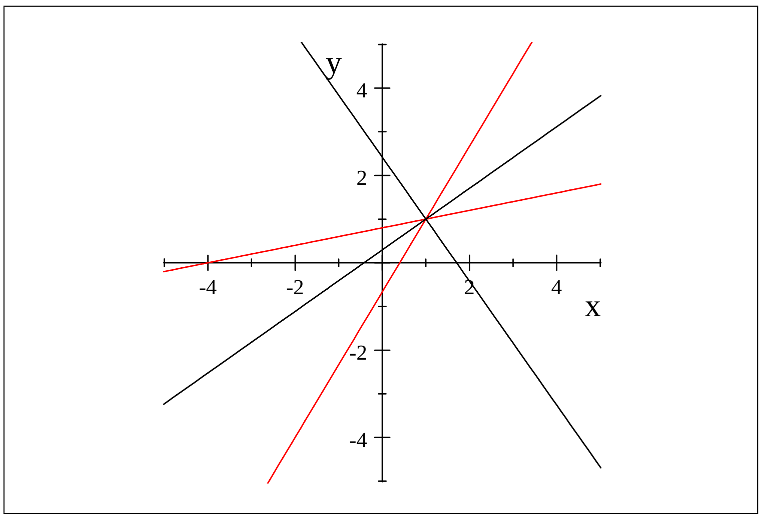
De la ecuación anterior, obtenemos las siguientes ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{c} \sqrt{17}\,(x-5y+4) = \sqrt{13}\,(5x-3y-2) \\ \sqrt{17}\,(x-5y+4) = \sqrt{13}\,(-5x+3y+2) \end{array}\right]$$

Quedando de esta manera las ecuaciones:

$$\left[\begin{array}{c} x\left(5\sqrt{13}-\sqrt{17}\right)-y\left(3\sqrt{13}-5\sqrt{17}\right)-2\sqrt{13}-4\sqrt{17}=0 \\ x\left(-5\sqrt{13}-\sqrt{17}\right)+y\left(3\sqrt{13}+5\sqrt{17}\right)+2\sqrt{13}-4\sqrt{17}=0 \end{array}\right]$$

Cada una de ellas representa una de las bisectrices.
Ahora bien ¿cuál es la interior y cuál la exterior?
Bastará con que las dibujes



La 1^a recta $x\left(5\sqrt{13}-\sqrt{17}\right)-y\left(3\sqrt{13}-5\sqrt{17}\right)-2\sqrt{13}-4\sqrt{17}=0$ es la bisectriz interior y la 2^a es la exterior.

Segundo procedimiento

Las bisectrices de dos rectas r y s ,secantes en $P=r\cap s$, son aquellas rectas que pasan por P y cuyos vectores directores son $\frac{\overrightarrow{v_r}}{\|\overrightarrow{v_r}\|}+\frac{\overrightarrow{vs}}{\|\overrightarrow{v_s}\|}$ y $\frac{\overrightarrow{v_r}}{\|\overrightarrow{v_r}\|}-\frac{\overrightarrow{vs}}{\|\overrightarrow{v_s}\|}$ respectivamente.

Calculemos el punto en común de r y s.Para ello consideramos el sistema

$$r\cap s\equiv\left\{\begin{array}{l} y=\frac{x+4}{5} \\ y=\frac{5x-2}{3} \end{array}\right.$$

cuya solución es $x=1$ e $y=1\rightarrow P(1,1)$son respectivamente
Vamos a obtener la dos bisectrices: la interior ,b_{int}, y la exterior b_{ext}
Así pues:

$$b_{int} \equiv \begin{cases} P(1,1) \\ \dfrac{\overrightarrow{v_r}}{\|\overrightarrow{v_r}\|} + \dfrac{\overrightarrow{vs}}{\|\overrightarrow{v_s}\|} = \frac{1}{\sqrt{26}}(5,1) + \frac{1}{\sqrt{34}}(3,5) = \frac{1}{\sqrt{26}}(5,1) + \frac{1}{\sqrt{34}}(3,5) \end{cases}$$

Si $\overrightarrow{v} = \sqrt{34}\sqrt{26}\left(\dfrac{\overrightarrow{v_r}}{\|\overrightarrow{v_r}\|} + \dfrac{\overrightarrow{vs}}{\|\overrightarrow{v_s}\|}\right) = (3\sqrt{26} + 5\sqrt{34}, 5\sqrt{26} + \sqrt{34})$

El vector $\overrightarrow{v}' = \frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{v} = (3\sqrt{13} + 5\sqrt{17}, 5\sqrt{13} + \sqrt{17})$ también es un vector que determina la dirección de la recta b_{int}.

Por lo tanto un vector ortogonal a b_{int} puede ser el vector:

$$\overrightarrow{w_A} = (-5\sqrt{13} - \sqrt{17}, 3\sqrt{13} + 5\sqrt{17})$$

$$b_{int} \equiv \begin{cases} P(1,1) \\ \overrightarrow{w_A} = (-5\sqrt{13} - \sqrt{17}, 3\sqrt{13} + 5\sqrt{17}) \text{ vector ortogonal a } b_{int} \end{cases}$$

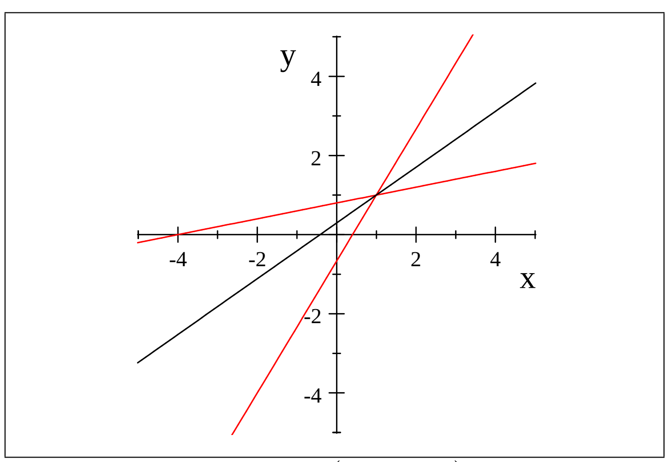
La ecuación cartesiana de la bisectriz b_{int} es:

$$\left(-5\sqrt{13} - \sqrt{17}\right)(x-1) + \left(3\sqrt{13} + 5\sqrt{17}\right)(y-1) = 0$$

Quedando así:

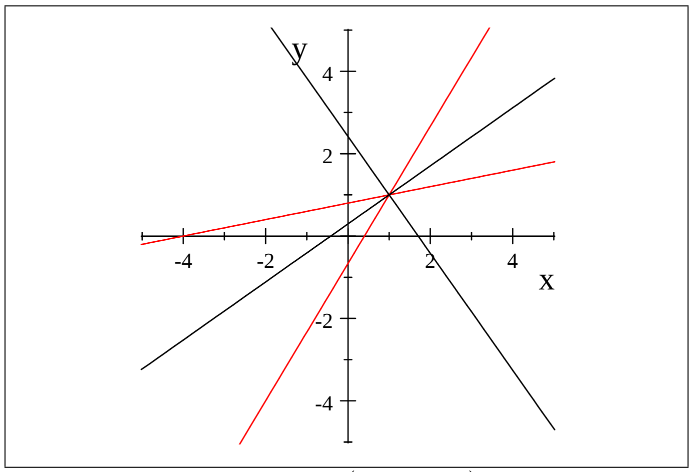
$$\left(-5\sqrt{13} - \sqrt{17}\right)x + \left(3\sqrt{13} + 5\sqrt{17}\right)y = -2\sqrt{13} + 4\sqrt{17}$$

Si dibujamos la recta obtenida efectivamente, vemos que es la bisectriz interior b_{int}



Bisectriz interior $y = \frac{\left(5\sqrt{13}+\sqrt{17}\right)x - 2\sqrt{13} + 4\sqrt{17}}{3\sqrt{13}+5\sqrt{17}}$

Calcula ahora tú, la bisectriz exterior. Ya sabes; que esta recta: "Pasa por el punto P y su vector director es $\dfrac{\overrightarrow{v_r}}{\|\overrightarrow{v_r}\|} - \dfrac{\overrightarrow{vs}}{\|\overrightarrow{v_s}\|}$



Bisectriz exterior $y = \frac{\left(5\sqrt{13}-\sqrt{17}\right)x-2\sqrt{13}-4\sqrt{17}}{3\sqrt{13}-5\sqrt{17}}$

7. Elementos notables de un triángulo

Dado un triángulo de vértices A, B, C llamaremos:

1. Circuncentro del triángulo de vértices A, B, C:

- – Al centro de la circunferencia circunscrita al triángulo
  – Punto de intersección de las rectas mediatrices de cada lado (La mediatriz del lado AB es la recta perpendicular al lado AB que pasa por el punto medio de dicho lado)
  – Es el punto del plano que equidista de los tres vértices

2. Baricentro (o centro de gravedad) del triángulo de vértices A, B, C :

- – Al punto de intersección de las rectas medianas de cada vértice. (La mediana del vértice A es la recta que pasa por A y el punto medio del lado opuesto BC)

3. Ortocentro del triángulo de vértices A, B, C :

- – Al punto de intersección de las rectas alturas de cada vértice (La Recta altura del vértice A es la recta que pasa por A y es perpendicular al lado opuesto BC)

4. Incentro del triángulo de vértices A, B, C :

- – Al punto en común de las rectas bisectrices interiores asociadas a cada vértice (La Recta bisectriz interior del vértice A es la recta que divide al ángulo $\widehat{A}$ en dos partes iguales[5])
  – Es el centro de la circunferencia inscrita en dicho triángulo
  – Es el punto del plano que equidista de las rectas asociadas a cada uno de los lados AB, $AC\ y\ AD$

Ejemplo a) Determina el baricentro del triángulo de vértices $A(2,-1), B(1,3)\ C(5,4)$

Recuerda que si G es el baricentro del triángulo de vértices A, B, C entonces $G = m_A \cap m_B \cap m_C$; donde m_A es la recta mediana asociada al vértice A, m_B es la recta mediana asociada al vértice B y m_C es la recta mediana asociada al vértice C

Calculemos dos de estas medianas

[5] También es la recta que pasa por A y su vector director es $\frac{\overrightarrow{AB}}{\|\overrightarrow{AB}\|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{\|\overrightarrow{AC}\|}$

1. m_A es la recta mediana asociada al vértice A.

Calculemos m_A recta que pasa por $A(2,-1)$ y por el punto medio , J_1 del lado BC $(J_1 = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+4}{2}\right))$

$m_A \equiv \begin{cases} A(2,-1) \\ J_1 = \left(3, \frac{7}{2}\right) \end{cases} \rightarrow m_A \equiv \begin{cases} A(2,-1) \\ \overrightarrow{AJ_1} = \left(3-2, \frac{7}{2}+1\right) = (1, \frac{9}{2}) \text{ vector director} \end{cases}$

$m_A \equiv \begin{cases} A(2,-1) \\ \overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{AJ_1} = (2,9) \text{ otro vector director} \end{cases} \rightarrow m_A \equiv \begin{cases} A(2,-1) \\ \overrightarrow{w} = (-9,2) \text{ vector ortogonal} \end{cases}$

La ecuación cartesiana de la mediana del vértice A es:

$$-9(x-2) + 2(y+1) = 0 \rightarrow -9x + 2y = -20$$

2. m_B es la recta mediana asociada al vértice B.

Calculemos m_B recta que pasa por $B(1,3)$ y por el punto medio , J_2, del lado AC $(J_2 = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{-1+4}{2}\right))$

$m_B \equiv \begin{cases} B(1,3) \\ J_2 = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right) \end{cases} \rightarrow m_B \equiv \begin{cases} B(1,3) \\ \overrightarrow{BJ_2} = \left(\frac{7}{2}-1, \frac{3}{2}-3\right) = (\frac{5}{2}, -\frac{3}{2}) \text{ vector director} \end{cases}$

$m_B \equiv \begin{cases} B(1,3) \\ \overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{BJ_2} = (5,-3) \text{ otro vector director} \end{cases} \rightarrow m_B \equiv \begin{cases} B(1,3) \\ \overrightarrow{w} = (3,5) \text{ vector ortogonal} \end{cases}$

La ecuación cartesiana de la mediana del vértice B es:

$$3(x-1) + 5(y-3) = 0 \rightarrow 3x + 5y = 18$$

El baricentro G es el punto en común de las rectas m_A y m_B

Calculémoslo $G = m_A \cap m_B \equiv \begin{cases} -9x + 2y = -20 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$

Multiplicamos la 2^a ecuación por 2

$$\begin{cases} -9x + 2y = -20 \\ 9x + 15y = 54 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$$17y = 34 \rightarrow y = 2$$

Sustituyendo el valor de y en la 1^a

$$-9x + 4 = -20 \rightarrow x = \frac{8}{3}$$

El punto de intersección de las medianas de los vértices A y B es el baricentro buscado. Así pues:

$$G\left(\frac{8}{3},2\right)$$

Si deseasemos determinar si el baricentro obtenido es correcto, nos bastaría con calcular la mediana que nos falta m_C y comprobar que efectivamente el punto $G \in m_C$

Comprobémoslo:

Calculemos m_C es la recta mediana asociada al vértice C.

Es la recta que pasa por $C(5,4)$ y por el punto medio , J_3 del lado AB $(J_3 = \left(\frac{2+1}{2}, \frac{-1+3}{2}\right))$

$m_C \equiv \begin{cases} C(5,4) \\ J_3 = \left(\frac{3}{2},1\right) \end{cases} \rightarrow m_C \equiv \begin{cases} C(5,4) \\ \overrightarrow{CJ_3} = \left(\frac{3}{2}-5, 1-4\right) = \left(-\frac{7}{2},-3\right) \text{ vector director} \end{cases}$

$m_C \equiv \begin{cases} C(5,4) \\ \overrightarrow{v} = 2\overrightarrow{CJ_3} = (-7,-6) \text{ otro vector director} \end{cases} \rightarrow m_C \equiv \begin{cases} C(5,4) \\ \overrightarrow{w} = (6,-7) \text{ vector ortogonal} \end{cases}$

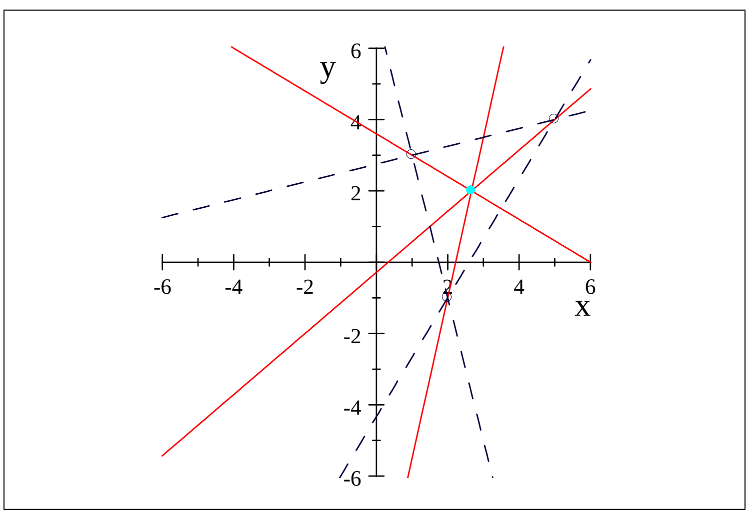
La ecuación cartesiana de la mediana del vértice C es:

$$6(x-5)-7(y-4)=0 \rightarrow 6x-7y=2$$

¿El punto $G\left(\frac{8}{3},2\right) \in m_C \equiv 6x-7y=2$?

$$Como\ 6\left(\frac{8}{3}\right)-7\,(2)=2$$

Podemos afirmar que $G \in m_C$. El ejercicio está bien.



Nota: También podías haber corregido el ejercicio anterior; teniendo presente que:

El baricentro del triángulo de vértices ABC es el punto G que verifica:

$$\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$$

siendo $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}, \overrightarrow{OC}, \overrightarrow{OG}$ los vectores de posición de los puntos A, B, C, G respectivamente

Comprueba, utilizando esta nota, que el ejercicio anterior está bien.

Ejemplo b) Determina el circuncentro del triángulo de vértices $A(2,-1), B(1,3)$ $C(5,4)$

Recuerda que si $\mathtt{C}$ es el circuncentro del triángulo de vértices A, B, C entonces $G = t_1 \cap t_2 \cap t_3$; donde t_1 es la recta mediatriz del lado AB , t_2 es la recta mediatriz del lado BC y t_3 es la recta mediatriz del lado AC

Calculemos dos de estas mediatrices

1. t_1 es la recta mediatriz asociada al lado AB.

Calculemos t_1 $\rightarrow$ recta que pasa por el punto medio , J_3, del lado AB ($J_3 = \left(\frac{2+1}{2}, \frac{-1+3}{2}\right)$) y es perpendicular al lado AB ($\overrightarrow{AB} = (-1,4)$).

$t_1 \equiv \begin{cases} J_3 = \left(\frac{3}{2}, 1\right) \\ \overrightarrow{AB} = (-1,4) \text{ vector ortogonal} \end{cases}$

La ecuación cartesiana de la mediatriz del lado AB es:

$$-1(x - \frac{3}{2}) + 4(y-1) = 0 \rightarrow -x + 4y = \frac{5}{2}$$

2. t_2 es la recta mediatriz asociada al lado BC.

Calculemos t_2 $\rightarrow$recta que pasa por por el punto medio , J_1 del lado BC ($J_1 = \left(\frac{1+5}{2}, \frac{3+4}{2}\right)$ y es perpendicular al lado BC ($\overrightarrow{BC} = (4,1)$)

$t_2 \equiv \begin{cases} J_1 = \left(3, \frac{7}{2}\right) \\ \overrightarrow{BC} = (4,1) \text{ vector ortogonal} \end{cases}$

La ecuación cartesiana de la mediatriz del lado BC es:

$$4(x-3) + 1(y - \frac{7}{2}) = 0 \rightarrow 4x + y = \frac{31}{2}$$

El circuncentro $\mathtt{C}$ es el punto en común de las rectas t_1 y t_2

Calculémoslo $\mathtt{C} = t_1 \cap t_2 \equiv \begin{cases} -x + 4y = \frac{5}{2} \\ 4x + y = \frac{31}{2} \end{cases}$

Multiplicamos la 1^a ecuación por 4

$$\begin{cases} -4x + 16y = 10 \\ 4x + y = \frac{31}{2} \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$$17y = \frac{51}{2} \rightarrow y = \frac{3}{2}$$

Sustituyendo el valor de y en la 1^a

$$-4x + 24 = 10 \rightarrow x = \frac{7}{2}$$

El punto de intersección de las mediatrices de los lados AB y BC es el circuncentro buscado. Así pues:

$$\mathsf{C}\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right)$$

Si deseasemos determinar si el circuncentro obtenido es correcto, nos bastaría con calcular la mediatriz del lado AC ,t_3, y comprobar que efectivamente el punto $\mathsf{C} \in t_3$

Comprobémoslo:

Calculemos $t_3 \rightarrow$ la recta mediatriz del lado AC.

Es la recta que pasa por el punto medio , J_2, del lado AC ($J_2 = \left(\frac{2+5}{2}, \frac{-1+4}{2}\right)$ y es perpendicular al lado AC ($\overrightarrow{AC} = (3, 5)$)

$$t_3 \equiv \begin{cases} J_2 = \left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right) \\ \overrightarrow{AC} = (3, 5) \text{ vector ortogonal} \end{cases} \rightarrow$$

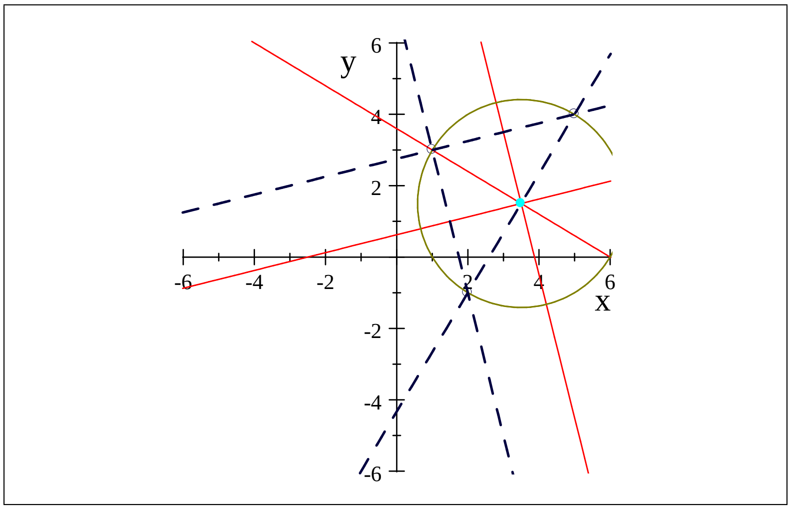
La ecuación cartesiana de la mediatriz del lado AC es:

$$3(x - \frac{7}{2}) + 5(y - \frac{3}{2}) = 0 \rightarrow 3x + 5y = 18$$

¿El punto $\mathsf{C}\left(\frac{7}{2}, \frac{3}{2}\right) \in t_3 \equiv 3x + 5y = 18$?

$$Como\ 3\left(\frac{7}{2}\right) + 5\left(\frac{3}{2}\right) = 18$$

Podemos afirmar que $\mathsf{C} \in t_3$. El ejercicio está bien.



Nota: Segundo procedimiento para calcular el circuncentro de un triángulo
El circuncentro de un triángulo es el punto del plano que equidista de sus vértices
Si C *es el circuncentro del triángulo de vértices* ABC *siempre se verifica que:*

$$d(\mathsf{C},A)=d(\mathsf{C},B)=d(\mathsf{C},C)\Longleftrightarrow\left\{\begin{array}{c}d(\mathsf{C},A)=d(\mathsf{C},B)\\ y\\ d(\mathsf{C},A)=d(\mathsf{C},C)\end{array}\right.\qquad (*)$$

Si suponemos que $\mathsf{C}(a,b)$

Fíjate que $\left[\begin{array}{l}\overrightarrow{A\mathsf{C}}=(x-2,y+1)\\ \overrightarrow{B\mathsf{C}}=(x-1,y+3)\\ \overrightarrow{C\mathsf{C}}=(x-5,y-4)\end{array}\right]$ *y* $\left[\begin{array}{l}\left\|\overrightarrow{A\mathsf{C}}\right\|=d(\mathsf{C},A)\\ \left\|\overrightarrow{B\mathsf{C}}\right\|=d(\mathsf{C},B)\\ \left\|\overrightarrow{C\mathsf{C}}\right\|=d(\mathsf{C},C)\end{array}\right]$

Por lo que; en virtud de (*) obtendremos el siguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{l}\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-1)^2+(y-3)^2}\\ \sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-5)^2+(y-4)^2}\end{array}\right.$$

Después de elevar al cuadrado los dos miembros de cada ecuación y realizar las transposiciones oportunas; obtendremos el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left\{\begin{array}{l}-2x+8y=5\\ 6x+10y=36\end{array}\right.$$

Cuya solución es $x=\frac{7}{2},y=\frac{3}{2}$ *(compruébalo tú)*
Así pues; el circuncentro del triángulo dado es el punto

$$\mathsf{C}\left(\frac{7}{2},\frac{3}{2}\right)$$

Ejemplo c) Determina el ortocentro del triángulo de vértices $A(2,-1), B(1,3)\ C(5,4)$

Recuerda que si W es el ortocentro del triángulo de vértices A, B, C entonces $W = h_1 \cap h_2 \cap h_3$; donde h_1 es la recta altura del vértice A , h_2 es la recta altura del vértice B y h_3 es la recta altura del vértice C

Calculemos dos de estas mediatrices

1. h_1 es la recta altura del vértice A.

Calculemos h_1 →recta que pasa por A y es perpendicular al lado BC ($\overrightarrow{BC} = (4,1)$)

$h_1 \equiv \begin{cases} A(2,-1) \\ \overrightarrow{BC} = (4,1) \text{ vector ortogonal} \end{cases}$

La ecuación cartesiana de la recta altura del vértice A es:

$$4(x-2) + 1(y+1) = 0 \rightarrow 4x + y = 7$$

2. h_2 es la recta altura del vértice B

Calculemos h_2 →recta que pasa por B y es perpendicular al lado AC ($\overrightarrow{AC} = (3,5)$)

$h_2 \equiv \begin{cases} B = (1,3) \\ \overrightarrow{AC} = (3,5) \text{ vector ortogonal} \end{cases}$

La ecuación cartesiana de la mediatriz del lado BC es:

$$3(x-1) + 5(y-3) = 0 \rightarrow 3x + 5y = 18$$

El ortocentro W es el punto en común de las rectas h_1 y h_2

Calculémoslo $W = h_1 \cap h_2 \equiv \begin{cases} 4x + y = 7 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$

Multiplicamos la 1^a ecuación por -5

$$\begin{cases} -20x - 5y = -35 \\ 3x + 5y = 18 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones obtenemos:

$$-17x = -17 \rightarrow x = 1$$

Sustituyendo el valor de y en la 1^a

$$4 + y = 7 \rightarrow y = 3$$

El punto de intersección de las rectas alturas de los lados A y B es el ortocentro buscado. Asi pues:

$$W\,(1,3)$$

Si deseasemos determinar si el ortocentro obtenido es correcto, nos bastaría con calcular la recta altura del vértice C ,h_3, y comprobar que efectivamente el punto $W \in t_3$

Comprobémoslo:

Calculemos $h_3 \rightarrow$ la recta altura del vértice C.

Es la recta que pasa por $C(5,4)$ y es perpendicular al lado AB ($\overrightarrow{AB} = (-1,4)$)

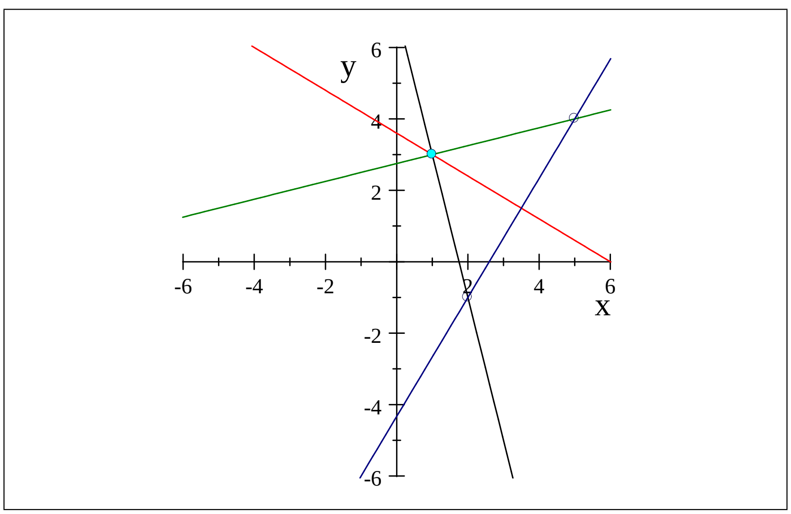
$h_3 \;\equiv \left\{ \begin{array}{c} C(5,4) \\ \overrightarrow{AB} = (-1,4) \text{ vector ortogonal} \end{array} \right. \rightarrow$

La ecuación cartesiana de la recta altura del vértice C es:

$$-(x-5)+4(y-4)=0 \rightarrow -x+4y=11$$

¿El punto $W\,(1,3) \in h_3 \equiv -x+4y=11$?

$$Como\; -(1)+12=11$$



Observa que el ortocentro W coincide con el vértice B.¿ Cómo será el triángulo ABC?

Ejemplo d) Clasifica el triángulo anterior según sus lados y ángulos. Determina su área

Como $\begin{bmatrix} A(2,-1) \\ B(1,3) \\ C(5,4) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB}(-1,4) \\ \overrightarrow{AC}(3,5) \\ \overrightarrow{BC}(4,1) \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} c = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{17} \\ b = \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{34} \\ a = \left\|\overrightarrow{BC}\right\| = \sqrt{17} \end{bmatrix}$

Fíjate que $a^2 = b^2 + c^2$y además $b = c$. Este triángulo es un triángulo rectángulo isósceles

Su superficie valdrá

$$A = \frac{base\ \cdot altura}{2} = \frac{\sqrt{17}\sqrt{17}}{2} = \frac{17}{2}\ \mathrm{u}^2$$

Veamos otro procedimiento para calcular la superficie del triángulo

Segundo procedimiento para calcular el área

Como la superficie del triángulo es $\quad A = \dfrac{base\ \cdot altura}{2}$

Podemos considerar como base cualquiera de los lados. Por lo que podemos determinar su superficie de tres maneras diferentes:

1. Si consideramos como base el lado AB; entonces $\begin{bmatrix} base = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{17} \\ altura = d(C, recta\ AB) \end{bmatrix}$

Calculemos la recta que contiene al lado AB

$s \equiv \begin{cases} A(2,-1) \\ B(1,3) \end{cases} \to s \equiv \begin{cases} A(2,-1) \\ \overrightarrow{AB}(-1,4) \text{ vector director} \end{cases}$

$$s \equiv \begin{cases} A(2,-1) \\ \overrightarrow{w}(4,1) \text{ vector ortogonal} \end{cases}$$

La ecuación cartesiana de la recta que contiene al lado AB es

$$4(x-2) + 1(y+1) = 0$$

Su ecuación normal es:

$$\frac{4x + 1y - 7}{\sqrt{17}} = 0$$

Por lo tanto

$$altura = d(C, recta\ AB) = \frac{|4 \cdot 5 + 1 \cdot 4 - 7|}{\sqrt{17}} = \frac{17}{\sqrt{17}} = \sqrt{17}$$

De lo que se deduce que:

$$A = \frac{base\ \cdot altura}{2} = \frac{\sqrt{17}\ \cdot \sqrt{17}}{2} = \frac{17}{2}\ \mathrm{u}^2$$

2. Determina el área considerando como base el lado BC (altura $d(A, recta\ BC)$)

3. Idem considerando como base el lado AC (altura $d(B, recta\ AC)$)

Tercer procedimiento para calcular el área

Teniendo presente que: *El área de cualquier triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman*;tendremos que ésta se puede calcular de tres formas distintas:

1. $\acute{A}rea = \dfrac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \sin\widehat{A}}{2}$

2. $\acute{A}rea = \dfrac{\left\|\overrightarrow{BA}\right\| \left\|\overrightarrow{BC}\right\| \sin\widehat{B}}{2}$

3. $\acute{A}rea = \dfrac{\left\|\overrightarrow{CA}\right\| \left\|\overrightarrow{CB}\right\| \sin\widehat{C}}{2}$

En todas ellas, tendremos que determinar el ángulo necesario

Vamos a calcular el ángulo $\widehat{A}$

Sabemos por definición de producto escalar que:

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \left\|\overrightarrow{AB}\right\| \cdot \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \cos\widehat{A} \qquad (**)$$

$Como \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB}(-1,4) \\ \overrightarrow{AC}(3,5) \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = -3+20 = 17 \\ \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{17} \\ \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{34} \end{bmatrix}$ y sustituyendo en ** tendremos que:

$$17 = \sqrt{17}\sqrt{34}\cos\widehat{A} \rightarrow \cos\widehat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Si $\cos\widehat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ y $\widehat{A}$ es agudo $\rightarrow \alpha = 45^o$ y por lo tanto

$$\acute{A}rea = \frac{\left\|\overrightarrow{AB}\right\| \left\|\overrightarrow{AC}\right\| \sin 45^o}{2} = \frac{\sqrt{17}\sqrt{34}\sin 45^o}{2} = \frac{17}{2}\ \mathrm{u}^2$$

Nota: Si tuvieses la calculadora a mano siempre puedes determinar el ángulo $\widehat{A}$ *y posteriormente el valor de* $\sin\widehat{A}$

Pero; si esto no fuese posible, puedes calcular el $\sin\widehat{A}$ *de la siguiente manera:*

Sabemos que $\cos\widehat{A} = \frac{1}{\sqrt{2}}$ *y* $\widehat{A}$ *es agudo. Utilizando la fórmula fundamental de trigonometría:*

$$\sin^2\widehat{A} + \cos^2\widehat{A} = 1 \rightarrow \sin\widehat{A} = \sqrt{1-\cos^2\widehat{A}} = \sqrt{1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Fijate que el $\sin\widehat{A}$ *no puede ser negativo.*

Ejemplo e) Dado el triángulo de vértices $A(2,-1)$ $B(1,3)$ $C(5,4)$ en los ejercicios anterior hemos determinado las coordenadas de su baricentro $G(\frac{8}{3},2)$, su circuncentro $\mathsf{C}(\frac{7}{2},\frac{3}{2})$ y su ortocentro $W = B = (1,3)$

a) Demuestra que los tres están en línea recta.

b) Existe alguna relación entre $\left\|\overrightarrow{G\mathsf{C}}\right\|$ y $\left\|\overrightarrow{GW}\right\|$

c) Determina la rectas que los une

Solución a)

Para determinar que están en línea recta los tres puntos anteriormente citados, bastará con calcular los vectores $\overrightarrow{G\mathsf{C}}$ y $\overrightarrow{GW}$ y observar que son paralelos :

$$\overrightarrow{G\mathsf{C}} = (\tfrac{7}{2}-\tfrac{8}{3},\tfrac{3}{2}-2) = \left(\tfrac{5}{6},-\tfrac{1}{2}\right)$$
$$\overrightarrow{GW} = (1-\tfrac{8}{3}-,3-2) = \left(-\tfrac{5}{3},1\right)$$
$$\text{Fíjate que: } \overrightarrow{GW} = -2\overrightarrow{G\mathsf{C}}$$

El baricentro , circuncentro y ortocentro de un triángulo cualesquiera siempre están en línea recta.A la recta que pasa por el baricentro, circuncentro y ortocentro de un triángulo se le denomina recta de Euler. Además; siempre se verifica que $\overrightarrow{GW} = -2\overrightarrow{G\mathsf{C}}$

$$\text{siendo}\begin{bmatrix} G \text{ el baricentro} \\ W \text{ el ortocentro} \\ \mathsf{C} \text{ el circuencentro} \end{bmatrix}$$

Solución b)

Como $\overrightarrow{GW} = -2\overrightarrow{G\mathsf{C}} \rightarrow \left\|\overrightarrow{GW}\right\| = |2|\left\|\overrightarrow{G\mathsf{C}}\right\| \rightarrow \left\|\overrightarrow{GW}\right\| = 2\left\|\overrightarrow{G\mathsf{C}}\right\|$

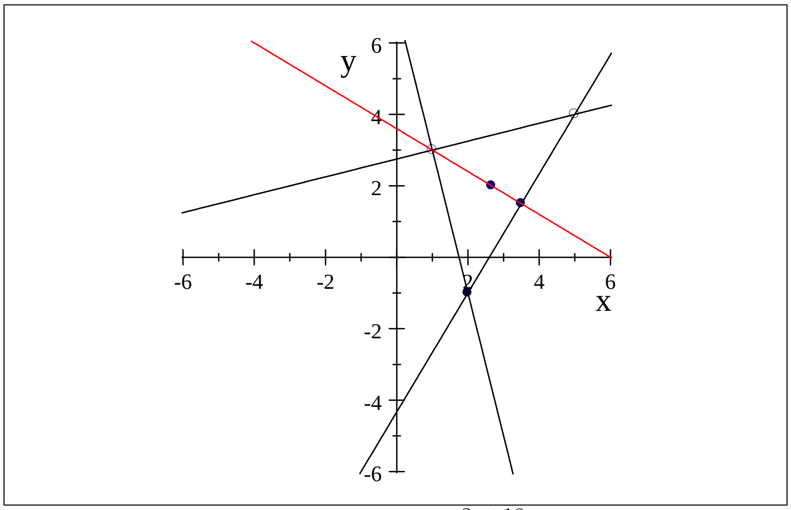
Solución c)

Determinemos la recta , t , que pasa por $W(1,3)$ y $G(\frac{8}{3},2)$

$$t \equiv \begin{cases} W(1,3) \\ G(\frac{8}{3},2) \end{cases} \rightarrow t \equiv \begin{cases} W(1,3) \\ 3\overrightarrow{GW} = (-5,3) \text{ vector director} \end{cases} \rightarrow t \equiv \begin{cases} W(1,3) \\ \overrightarrow{w}_t = (3,5) \text{ vector ortogonal} \end{cases}$$

La ecuación cartesiana de t es:

$$t \equiv 3(x-1) + 5(y-3) = 0 \rightarrow t \equiv 3x + 5y - 18 = 0$$



Recta de Euler $t \equiv y = \frac{-3x+18}{5}$ (en rojo)

Ejemplo f) Determina el incentro del triángulo de vértices $A(2,-1), B(1,3)\ C(5,4)$

Recuerda que si I es el incentro del triángulo de vértices A, B, C entonces $I = b_A \cap b_B \cap b_C$; donde b_A es la recta bisectriz interior asociada al vértice A, b_B es la recta bisectriz interior asociada al vértice B y b_C es la recta bisectriz interior asociada al vértice C

Calculemos dos de estas bisisectrices

1. b_A es la recta bisectriz interior asociada al vértice A

b_A es la recta que pasa por A y cuyo vector director es $\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}$

$$\left[\begin{array}{c} \overrightarrow{AB}(-1,4) \text{ y } \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{17} \\ \overrightarrow{AC}(3,5) \text{ y } \left\|\overrightarrow{AC}\right\| = \sqrt{34} \end{array} \right]$$

$$b_A \equiv \begin{cases} A(2,-1) \\ \dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{17}}(-1,4) + \frac{1}{\sqrt{34}}(3,5) \end{cases} :$$

Observa que $\sqrt{34}\left(\dfrac{\overrightarrow{AB}}{\left\|\overrightarrow{AB}\right\|}+\dfrac{\overrightarrow{AC}}{\left\|\overrightarrow{AC}\right\|}\right)=(3-\sqrt{2},4\sqrt{2}+5)$ también es un vector que determina la dirección de la recta b_A. Por lo tanto un vector ortogonal a b_A puede ser el vector $\overrightarrow{w_A}=(4\sqrt{2}+5,-3+\sqrt{2})$

$b_A \equiv \begin{cases} A(2,-1) \\ \overrightarrow{w_A}=(4\sqrt{2}+5,-3+\sqrt{2}) \text{ vector ortogonal a } b_A \end{cases}$

La ecuación cartesiana de la bisectriz interior asociada al vértice A es:

$$\begin{aligned} \left(4\sqrt{2}+5\right)(x-2)+\left(-3+\sqrt{2}\right)(y+1) &= 0 \\ \left(4\sqrt{2}+5\right)x+\left(-3+\sqrt{2}\right)y &= 7\sqrt{2}+13 \end{aligned}$$

2. b_B es la recta bisectriz interior asociada al vértice B

b_B es la recta que pasa por B y cuyo vector director es $\dfrac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|}+\dfrac{\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}$

$\left[\begin{array}{c} \overrightarrow{BA}(1,-4) \text{ y } \left\|\overrightarrow{AB}\right\|=\sqrt{17} \\ \overrightarrow{BC}(4,1) \text{ y } \left\|\overrightarrow{BC}\right\|=\sqrt{17} \end{array}\right]$

$b_B \equiv \begin{cases} B(1,3) \\ \dfrac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|}+\dfrac{\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}=\frac{1}{\sqrt{17}}(1,-4)+\frac{1}{\sqrt{17}}(4,1) \end{cases} :$

Observa que $\sqrt{17}\left(\dfrac{\overrightarrow{BA}}{\left\|\overrightarrow{BA}\right\|}+\dfrac{\overrightarrow{BC}}{\left\|\overrightarrow{BC}\right\|}\right)=(5,-3)$ también es un vector que determina la dirección de la recta b_B. Por lo tanto un vector ortogonal a b_B puede ser el vector $\overrightarrow{w_B}=(3,5)$

$b_B \equiv \begin{cases} B(1,3) \\ \overrightarrow{w_B}=(3,5) \text{ vector ortogonal a } b_B \end{cases}$

La ecuación cartesiana de la bisectriz interior asociada al vértice B es:

$$3(x-1)+5(y-3)=0 \rightarrow 3x+5y=18$$

El incentro , I, será el punto en común de las dos rectas bisectrices anteriores:

$$I=b_A\cap b_B \equiv \begin{cases} \left(4\sqrt{2}+5\right)x+\left(-3+\sqrt{2}\right)y=7\sqrt{2}+13 \\ 3x+5y=18 \end{cases}$$

Resolviéndolo con mucho esmero y cuidado, tendremos:

$$I = \left(\frac{\sqrt{2}+7}{\sqrt{2}+2}, \frac{3\sqrt{2}+3}{\sqrt{2}+2} \right) = \left(6 - \frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2} \right)$$

Si deseasemos determinar si el incentro obtenido es correcto; nos bastaría con calcular la recta bisectriz interior del vértice C ,b_C, y comprobar que efectivamente el punto $I \in b_C$

Comprobémoslo:

Calculemos b_C la recta bisectriz interior C.

Es la recta que pasa por $C(5,4)$ y cuyo vector director es $\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|}$

$$\left[\begin{array}{l} \overrightarrow{CB}(-4,-1) \text{ y } \left\|\overrightarrow{AB}\right\| = \sqrt{17} \\ \overrightarrow{CA}(-3,-5) \text{ y } \left\|\overrightarrow{CA}\right\| = \sqrt{34} \end{array} \right]$$

$$b_C \equiv \left\{ \begin{array}{c} C(5,4) \\ \dfrac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|} = \frac{1}{\sqrt{34}}(-3,-5) + \frac{1}{\sqrt{17}}(-4,-1) \end{array} \right.$$

Observa que $\sqrt{34}\left(\dfrac{\overrightarrow{CA}}{\left\|\overrightarrow{CA}\right\|} + \dfrac{\overrightarrow{CB}}{\left\|\overrightarrow{CB}\right\|} \right) = (-4\sqrt{2}-3, -\sqrt{2}-5)$ es un vector que determina también la dirección de la recta b_C.Un vector ortogonal a esta recta será $\overrightarrow{w_C} = (\sqrt{2}+5, -4\sqrt{2}-3)$

$$b_C \equiv \left\{ \begin{array}{c} C(5,4) \\ \overrightarrow{w_C} = (\sqrt{2}+5, -4\sqrt{2}-3) \text{ vector ortogonal a } b_C \end{array} \right.$$

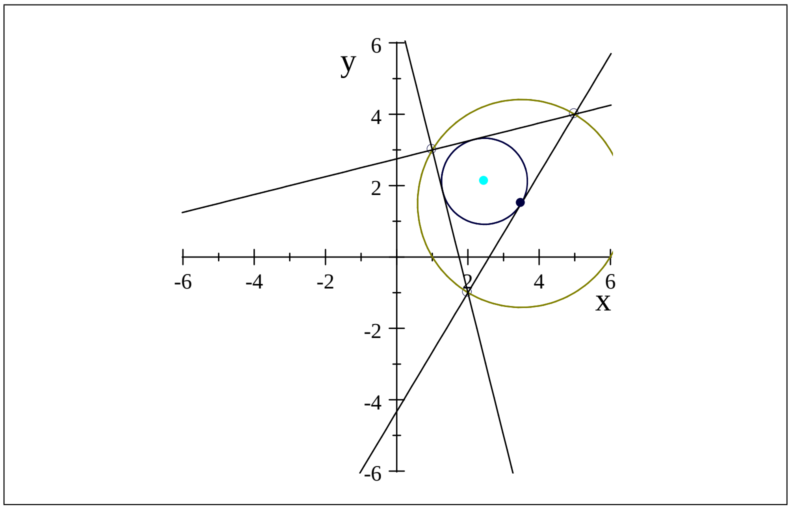
La ecuación cartesiana de la bisectriz interior asociada al vértice C es:

$$\begin{aligned} \left(\sqrt{2}+5\right)(x-5) + \left(-4\sqrt{2}-3\right)(y-4) &= 0 \\ \left(\sqrt{2}+5\right)x + \left(-4\sqrt{2}-3\right)y &= -11\sqrt{2}+13 \end{aligned}$$

¿El incentro $I = \left(6 - \frac{5}{2}\sqrt{2}, \frac{3}{2}\sqrt{2}\right)$ pertenece a la recta b_C?

Como $\left(\sqrt{2}+5\right)\left(6 - \frac{5}{2}\sqrt{2}\right) + \left(-4\sqrt{2}-3\right)\frac{3}{2}\sqrt{2} = 13 - 11\sqrt{2}$

Podemos afirmar que $I \in b_C$.El ejercicio está perfecto.



Ejemplo g) Dado el triángulo de vértices $A(3,-2)$ $B(-1,3)$ y $C(5,4)$ determina:

a) La longitud de sus lados y sus ángulos interiores

b) Su superficie

c) Las ecuaciones cartesianas de las rectas que contienen sus tres lados

d) El baricentro

e) El circuncentro, el radio de la circunferencia circunscrita y la ecuación de ésta

f) El ortocentro

g) El incentro, el radio de la circunferencia inscrita y la ecuación de ésta (Muy difícil, necesitaréis un programa como el Derive para los cálculos)

7.1. Cuestiones difíciles (Nivel 2^o Bachiller).

Cuestión f) Demuestra que en un triángulo de vértices $A(x_0, y_0)$ $B(x_1, y_1)$ y $C(x_3, y_3)$ siempre se verifica que:

$$G\left(\frac{x_0+x_1+x_2}{3}, \frac{y_0+y_1+y_2}{3}\right) \text{ es el baricentro}$$

Cuestión g) Demuestra que en un triángulo de vértices $A(x_0, y_0)$ $B(x_1, y_1)$ y $C(x_3, y_3)$ siempre se verifica que:

$$\mathtt{C}\left(\frac{2\begin{vmatrix} x_1^2-x_0^2+y_1^2-y_0^2 & y_1-y_0 \\ x_2^2-x_0^2+y_2^2-y_0^2 & y_2-y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}}, \frac{2\begin{vmatrix} x_1-y_0 & x_1^2-x_0^2+y_1^2-y_0^2 \\ x_2-y_0 & x_2^2-x_0^2+y_2^2-y_0^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1-x_0 & y_1-y_0 \\ x_2-x_0 & y_2-y_0 \end{vmatrix}}\right) \; Es\ el\ Circuncentro$$

Nota: Después de estudiar determinantes en 2^o Bachiller; podrás resolver este ejercicio

Cuestión h) Demuestra que en un triángulo de vértices $A(x_0, y_0)$ $B(x_1, y_1)$ y $C(x_3, y_3)$ siempre se verifica que:

$$W = \left(\frac{-4 \begin{vmatrix} x_1^2 - x_0^2 + y_1^2 - y_0^2 & y_1 - y_0 \\ x_2^2 - x_0^2 + y_2^2 - y_0^2 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}} + x_0 + x_1 + x_2, \frac{-2 \begin{vmatrix} x_1 - y_0 & x_1^2 - x_0^2 + y_1^2 - y_0^2 \\ x_2 - y_0 & x_2^2 - x_0^2 + y_2^2 - y_0^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x_1 - x_0 & y_1 - y_0 \\ x_2 - x_0 & y_2 - y_0 \end{vmatrix}} + y_0 + y_1 + y_2 \right)$$

donde W es el ortocentro