Método de Gauss

Ejercicio 1 Demuestra que el sistema

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+3z+4t+5u=1 \\ -x+2y+4z-4t+6u=1 \\ 2x+3y+z-t-2u=4 \\ -2x-3y-2z+t+u=3 \\ 3x-y+z-2t+4u=-2 \end{array}\right\}$$

es compatible determinado y que su solución es

$$S=\left\{\left(\frac{37}{53},\frac{3969}{212},-\frac{79}{4},\frac{881}{106},\frac{51}{4}\right)\right\}$$

Solución:

$$\left(\begin{array}{rrrrrcr} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & | & 1 \\ -1 & 2 & 4 & -4 & 6 & | & 1 \\ 2 & 3 & 1 & -1 & -2 & | & 4 \\ -2 & -3 & -2 & 1 & 1 & | & 3 \\ 3 & -1 & 1 & -2 & 4 & | & -2 \end{array}\right) \to \begin{array}{c} 2^a Ec+1^a Ec \\ 3^a Ec-2{\cdot}1^a Ec \\ 4^a Ec+2{\cdot}1^a Ec \\ 5^a Ec-3{\cdot}1^a Ec \end{array} \to \left(\begin{array}{rrrrrcr} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & | & 1 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 11 & | & 2 \\ 0 & 7 & -5 & -9 & -12 & | & 2 \\ 0 & -7 & 4 & 9 & 11 & | & 5 \\ 0 & 5 & -8 & -14 & -11 & | & -5 \end{array}\right)$$

Ahora; intercambiamos las filas de la siguiente manera.

$$\left(\begin{array}{rrrrrcr} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & | & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -9 & -12 & | & 2 \\ 0 & -7 & 4 & 9 & 11 & | & 5 \\ 0 & 5 & -8 & -14 & -11 & | & -5 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 11 & | & 2 \end{array}\right)$$

Realizamos ahora las siguientes modificaciones

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ 3^a Ec+2^a Ec \\ 7{\cdot}4^a Ec-5{\cdot}2^a Ec \end{array} \to \left(\begin{array}{rrrrrcr} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & | & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -9 & -12 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & | & 7 \\ 0 & 0 & -31 & -53 & -17 & | & -45 \\ 0 & 0 & 7 & 0 & 11 & | & 2 \end{array}\right)$$

Y por último, éstas:

$$\begin{array}{c} \\ \\ \\ 4^a Ec-31{\cdot}3^a Ec \\ 5^a Ec+7{\cdot}3^a Ec \end{array} \to \left(\begin{array}{rrrrrcr} 1 & -2 & 3 & 4 & 5 & | & 1 \\ 0 & 7 & -5 & -9 & -12 & | & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & | & 7 \\ 0 & 0 & 0 & -53 & 14 & | & -262 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 & | & 51 \end{array}\right)$$

Con lo que el sistema inicial es equivalente al sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x-2y+3z+4t+5u=1 \\ 7y-5z-9t-12u=2 \\ -z-u=7 \\ -53t+14u=-262 \\ 4u=51 \end{array}\right\}$$

Resolviendo la última ecuación; obtenemos que

$$u = \frac{51}{4}$$

sustituyendo dicho valor en la 4^a ecuación

$$-53t + 14\left(\frac{51}{4}\right) = -262$$
$$-212t + 714 = -1048$$
$$1762 = 212t$$
$$t = \frac{1762}{212} = \frac{881}{106}$$

Sustituyendo los valores obtenidos para t y u en la tercera ecuación:

$$-z - \frac{51}{4} = 7$$
$$-\frac{51}{4} - 7 = z$$
$$z = -\frac{79}{4}$$

Sustituyendo en la segunda los valores de z, t y u :

$$7y - 5\left(-\frac{79}{4}\right) - 9\left(\frac{881}{106}\right) - 12\left(\frac{51}{4}\right) = 2$$

Y resolviendo esta ecuación tendremos que:

$$y = \frac{3969}{212}$$

Y por último sustituyendo en la 1^a ecuación los valores de las incógnitas anteriores, obtendremos la ecuación:

$$x - 2\left(\frac{3969}{212}\right) + 3\left(-\frac{79}{4}\right) + 4\left(\frac{881}{106}\right) + 5\left(\frac{51}{4}\right) = 1$$

Que al resolverla , nos da :

$$x = \frac{37}{53}$$